t. 481, s. 211

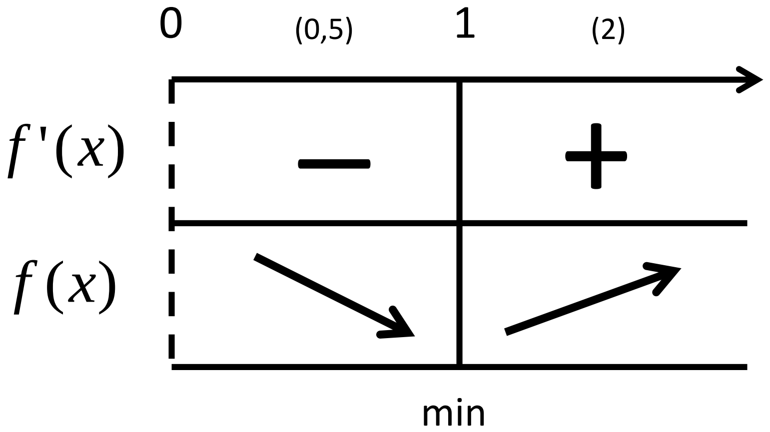
Tutkitaan funktiota $f(x) = x - \ln x$ derivaatan avulla.

Määrittelyehto: $x > 0$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat: $1 - \frac{1}{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$

Laaditaan funktion kulkukaavio:



Testipisteet: $f'(0{,}5) = 1 - \frac{1}{0{,}5} = 1 - 2 = -1 < 0$

$f'(2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

Kulkukaavion perusteella funktion f paikallinen minimi ja samalla pienin arvo on $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$.

Siis $f(x) = x - \ln x > 0$ kun $x > 0$, joten yhtälöllä $x - \ln x = 0$ ei ole reaalijuuria.

t. 489, s. 211

Merkitään $f(x) = 2px^3 + 3x^2 + 6x + 1$.

Polynomifunktio on jatkuva ja määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

Funktio f on aidosti kasvava reaalilukujen joukossa, jos ja vain jos $f'(x) \geq 0$, kun $x \in \mathbb{R}$ ja $f'(x) = 0$ korkeintaan vain erillisissä (terassi)kohdissa.

Derivoidaan:

$$f'(x) = 6px^2 + 6x + 6$$

Derivaattafunktion kuvaaja on paraabeli, jos $p \neq 0$.

Jos $p = 0$, niin $f'(x) = 6x + 6$, jolloin derivaatta saa myös negatiivisia arvoja (kun $x < -1$).

Jos $p < 0$, niin kyseessä on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa myös negatiivisia arvoja.

Täytyy siis olla $p > 0$, jolloin kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Derivaatalla saa olla vain korkeintaan yksi nollakohta (funktion terassikohta, jossa derivaatta käväisee nollassa, mutta merkki ei vaihdu).

Diskriminantti $D = b^2 - 4ac$ ei siis saa olla positiivinen. Tästä saadaan ehto:

$$D = 6^2 - 4 \cdot 6p \cdot 6 \leq 0$$

$$1 - 4p \leq 0$$

$$p \geq \frac{1}{4} \ (> 0)$$

Vastaus: Vakion arvoilla $p \geq \frac{1}{4}$.