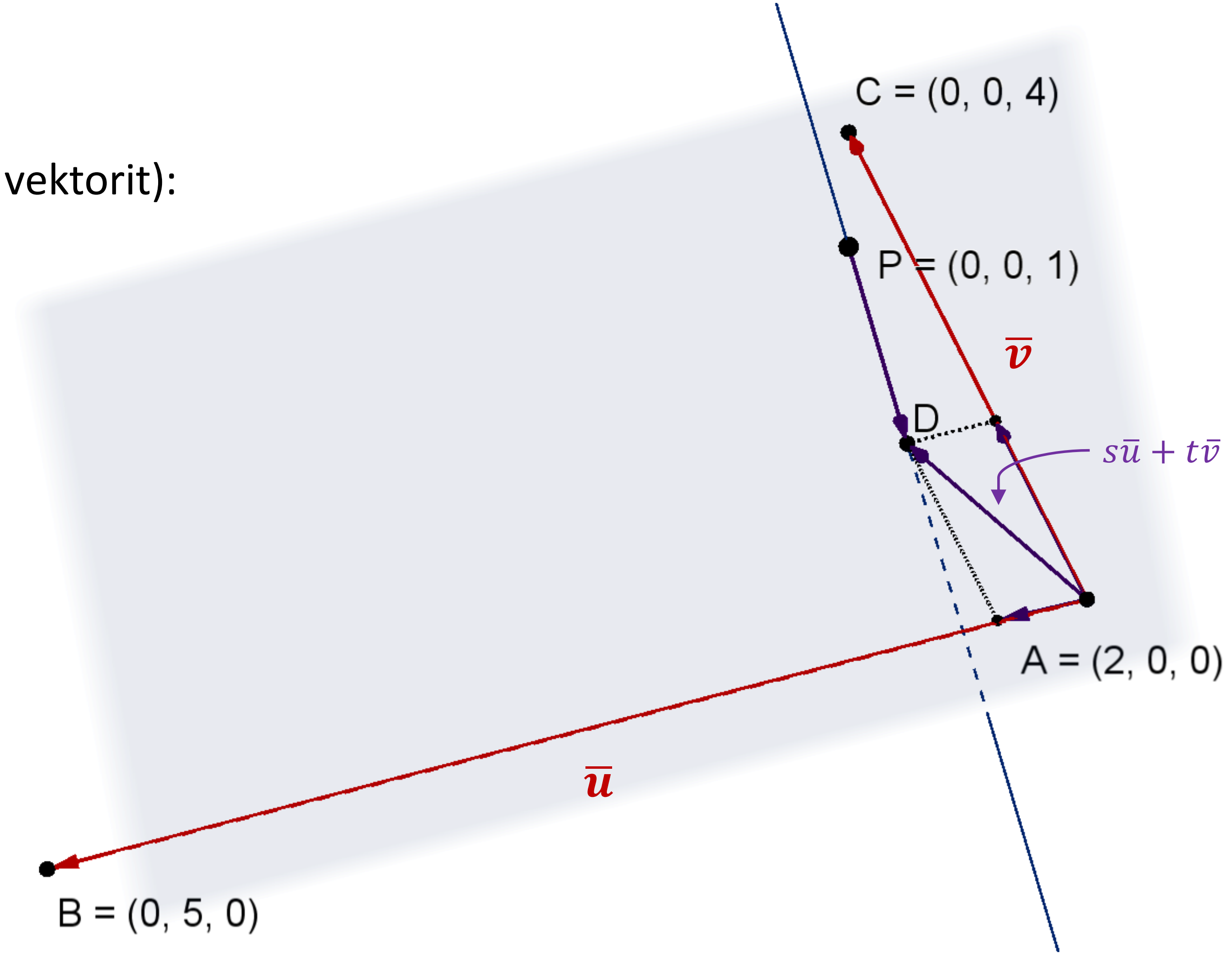
t. 459, s. 193

Ratkaisu (tapa 1):

Muodostetaan kaksi tason suuntavektoria (tason virittävät vektorit):



$$\bar{u} = \overline{AB} = (0-2)\bar{\imath} + (5-0)\bar{\jmath} + (0-0)\bar{k} = -2\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}$$

$$\bar{v} = \overline{AC} = (0-2)\bar{\imath} + (0-0)\bar{\jmath} + (4-0)\bar{k} = -2\bar{\imath} + 4\bar{k}$$

```
[-2 5 0]⇒u
                                        [-2 5 0]
[-2 0 4]⇒v
                                        [-2 0 4]
```

Pisteestä A päästään sopivilla parametrien s ja t arvoilla mihin tahansa tason pisteeseen, kun siirrytään vektorin $s\bar{u} + t\bar{v}$ suuntaisesti.

Koska vektori $\overline{PD}$ on eräs tason normaalivektori, niin se on kohtisuorassa kaikkia tason vektoreita vastaan.

Siis erityisesti $\overline{PD}$ on kohtisuorassa kantavektoreita vastaan ja **kohtisuoruusehdon** $\left(\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0\right)$ perusteella saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \overline{PD} \cdot \bar{u} = 0 \\ \overline{PD} \cdot \bar{v} = 0 \end{cases} \qquad (1.)$$

Esitetään $\overline{PD}$ tunnetun vektorin $\overline{PA}$ ja kantavektorien avulla:

$$\overline{PD} = \overline{PA} + s\bar{u} + t\bar{v} = 2\bar{\imath} - \bar{k} + s(-2\bar{\imath} + 5\bar{\jmath}) + t(-2\bar{\imath} + 4\bar{k})$$

$$(2-0)\bar{\imath} + (0-0)\bar{\jmath} + (0-1)\bar{k} = 2\bar{\imath} - \bar{k}$$

$[2\ \ 0\ \ -1]+s\times u+t\times v \Rightarrow PD$

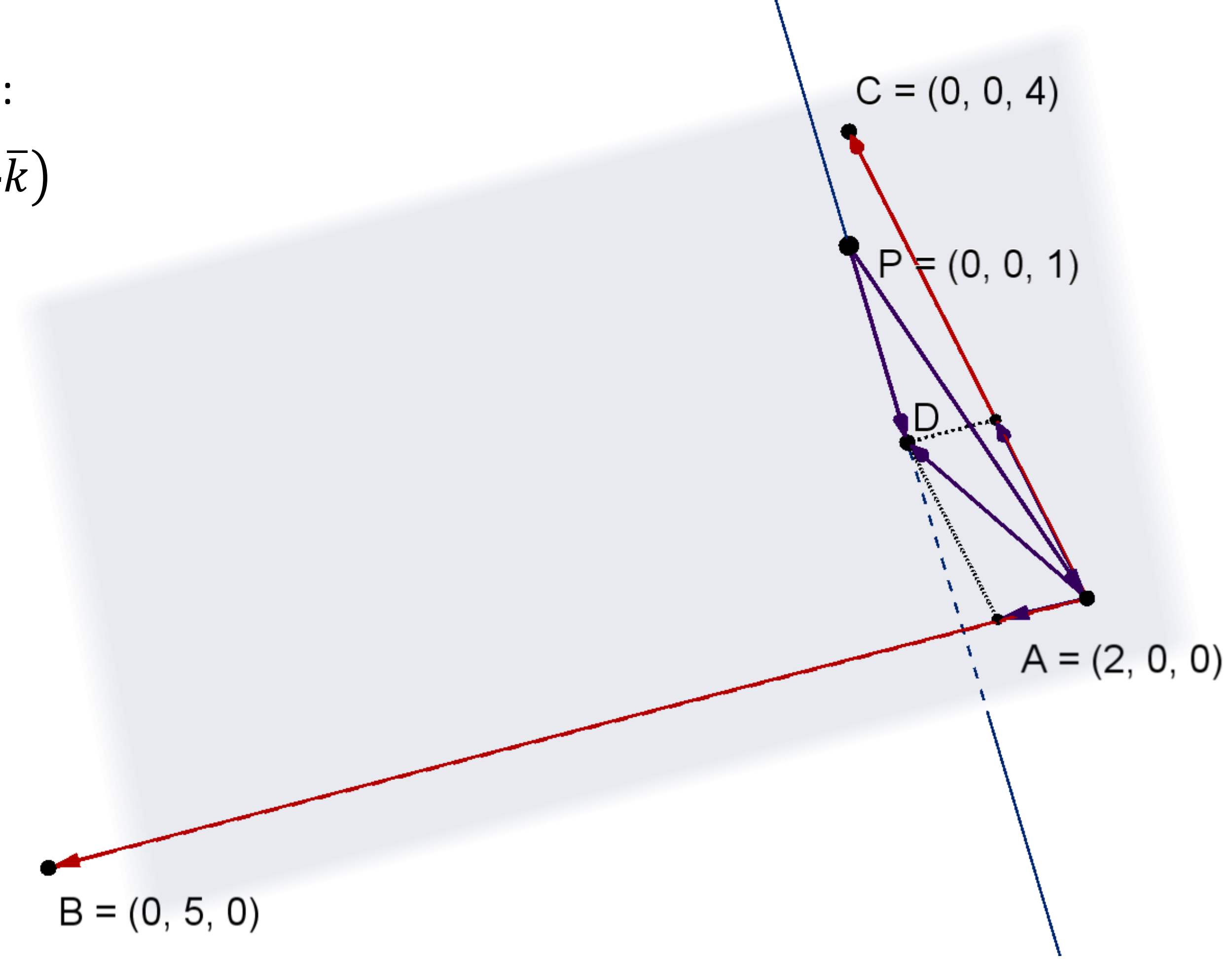
$[-2\cdot s-2\cdot t+2\ \ \ 5\cdot s\ \ \ 4\cdot t-1]$

$$\overline{PD} = (-2s - 2t + 2)\bar{\imath} + 5s\bar{\jmath} + (4t - 1)\bar{k}$$

Ratkaistaan yhtälöpari 1:

$$\begin{cases} \mathrm{dotP}(PD, u)=0 \\ \mathrm{dotP}(PD, v)=0 \end{cases}\Bigg|_{s,\,t}$$

$\left\{s=\frac{4}{47}, t=\frac{18}{47}\right\}$



Pisteen D paikkavektori on $\overline{OD} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v} = 2\bar{\imath} + s\bar{u} + t\bar{v}$.

Sijoitetaan tähän parametrien s ja t arvot:

$[2\ \ 0\ \ 0]+\frac{4}{47}u+\frac{18}{47}v$

$\left[\frac{50}{47}\ \ \frac{20}{47}\ \ \frac{72}{47}\right]$

V: Kysytty leikkauspiste on $\left(\frac{50}{47}, \frac{20}{47}, \frac{72}{47}\right)$.

Ratkaisu (tapa 2):

Tason yhtälön *normaalimuoto* on

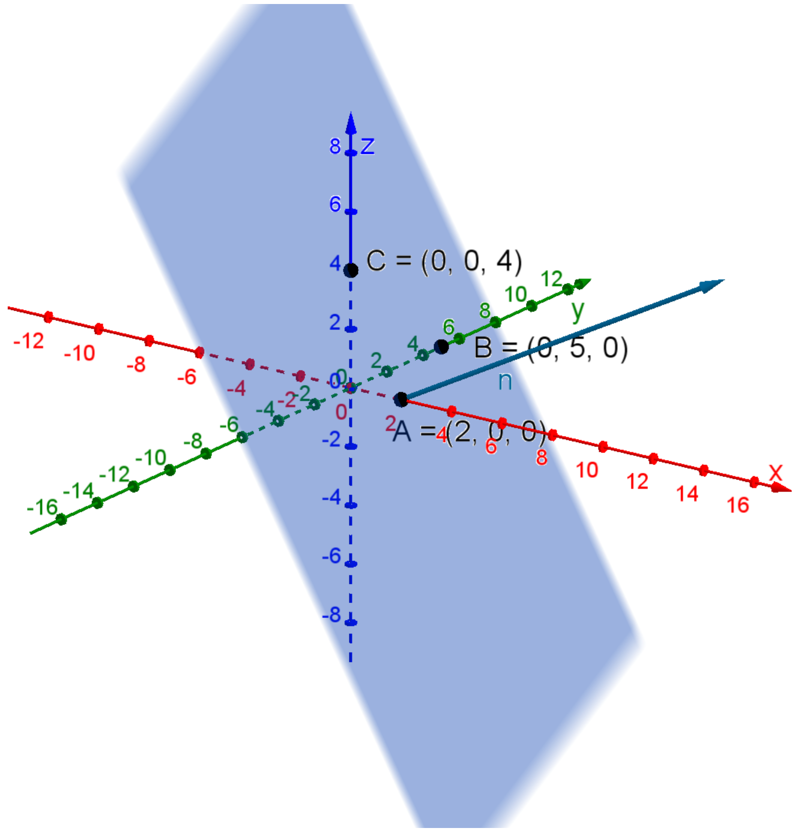
$$ax + by + cz + d = 0,$$

missä $\bar{n} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ on tason eräs *normaalivektori*. (MAOL s. 40)

Tason yhtälössä on neljä tuntematonta parametria a, b, c ja d.

Tason yhtälö voidaan kuitenkin ratkaista kolmen pisteen (yhtälön) avulla, sillä esimerkiksi d voitaisiin tarvittaessa jakaa pois.

Sijoitetaan tunnettujen pisteiden A, B ja C koordinaatit tason yhtälön normaalimuotoon. Saadaan yhtälöryhmä:



$a \times x + b \times y + c \times z + d = 0 \mid x = 2 \mid y = 0 \mid z = 0$

$$2 \cdot a + d = 0$$

$a \times x + b \times y + c \times z + d = 0 \mid x = 0 \mid y = 5 \mid z = 0$

$$5 \cdot b + d = 0$$

$a \times x + b \times y + c \times z + d = 0 \mid x = 0 \mid y = 0 \mid z = 4$

$$4 \cdot c + d = 0$$

$$\left.\begin{cases} 2 \cdot a + d = 0 \\ 5 \cdot b + d = 0 \\ 4 \cdot c + d = 0 \end{cases}\right|_{a,\, b,\, c}$$

$$\left\{a = \frac{-d}{2},\ b = \frac{-d}{5},\ c = \frac{-d}{4}\right\}$$

Tässä d voi olla mikä tahansa nollasta eroava reaaliluku (sillä yhtälön voi kertoa puolittain millä tahansa luvulla $d \neq 0$).

Valitsemalla $d = -20$ saadaan kertoimet luonnollisina lukuina:

$\left\{a=\frac{-d}{2}, b=\frac{-d}{5}, c=\frac{-d}{4}\right\} | d=-20$

$\{a=10, b=4, c=5\}$

Tason yhtälön (eräs) normaalimuoto on siis

$$10x + 4y + 5z - 20 = 0.$$

Suoran parametrimuoto voidaan muodostaa helposti tunnetun suoran pisteen $P = (x_0, y_0, z_0) = (0\,,0\,,1)$
ja suuntavektorin $\bar{n} = 10\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 5\bar{k}$ avulla (MAOL, s. 40) :

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 4t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \quad \text{, missä } t \in \mathbb{R}$$

Sijoittamalla lausekkeet tason yhtälöön saadaan ratkaistua se parametrin arvo, jolloin suora leikkaa tason:

10x+4y+5z−20=0 | x=10t | y=4t | z=1+5t

5·(5·t+1)+116·t−20=0

solve(5·(5·t+1)+116·t−20=0, t)

$\left\{t=\frac{5}{47}\right\}$

Sijoitetaan vielä kyseinen parametrin arvo $t = \frac{5}{47}$ suoran yhtälöön:

$x=10t \mid t=\frac{5}{47}$

$x=\frac{50}{47}$

$y=4t \mid t=\frac{5}{47}$

$y=\frac{20}{47}$

$z=1+5t \mid t=\frac{5}{47}$

$z=\frac{72}{47}$

V: Kysytty leikkauspiste on $\left(\frac{50}{47}, \frac{20}{47}, \frac{72}{47}\right)$.