

t. 142, s. 65

- Tehtävän lähtöoletukset:
1. Funktio f on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.
 2. $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$

Sijoitetaan kaavaan 2. sopivia (0 tai 1 ?!) reaalilukuja ja tutkitaan, saako kaavasta ratkaistua $f(x)$:n lausekkeen.

Sijoitetaan ensin $x = 0$ ja $y = 0$:

$$f(0)f(0) - f(0) = 0 + 0$$

$$f(0)(f(0) - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0) = 0 \text{ tai } f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

I Tapaus $f(0) = 0$: Sijoitetaan $y = 0$:

$$f(x)f(0) - f(0) = x + 0$$

$$f(x) \cdot 0 - 0 = x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x$$

Eli kun $y = 0$, kaava 2. toteutuu vain jos $x = 0$. Tämä on ristiriita, koska kaavan pitäisi toteutua kaikilla x :n arvoilla.

II Tapaus $f(0) = 1$: Sijoitetaan $y = 0$:

$$f(x)f(0) - f(0) = x + 0$$

$$f(x) \cdot 1 - 1 = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = x + 1$$

V: Kysytty funktio on $f(x) = x + 1$

Tarkistus:

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

$$(x + 1)(y + 1) - (xy + 1) = x + y$$

$$\cancel{xy} + x + y + \cancel{1} - \cancel{xy} - \cancel{1} = x + y$$

$$x + y = x + y$$

$$0 = 0$$

Aina tosi.