S2014/8 Tarkastellaan lukujonoja (a_n) ja (b_n), joiden kaikki termit a_n ja b_n, $n=1,2,\ldots$, ovat positiivisia.

a) Oletetaan, että jono (a_n) on geometrinen. Osoita, että $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ kaikilla $n=2,3,\ldots$

b) Oletetaan, että $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ kaikilla $n=2,3,\ldots$ Osoita, että jono (b_n) on geometrinen.

a) **Oletus:** Lukujono (a_n) on geometrinen ja $a_n > 0$, kaikilla indeksin n arvoilla.

Olkoon $q > 0$ geometrisen jonon suhdeluku, jolloin $a_{n+1} = qa_n$ ja $a_{n-1} = \frac{1}{q}a_n$, missä $n = 2, 3, \ldots$

$$\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{q}a_n q a_n} = \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n.$$

Edellinen jäsen saadaan seuraavasta jakamalla suhdeluvulla.

Tämä todistaa väitteen.

b) **Oletus:** $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ kun $n = 2, 3, \ldots$

Pyritään osoittamaan, että peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Neliöön korottamalla saadaan.

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} \quad \Big| \begin{array}{l} : b_n \\ : b_{n-1} \end{array}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

b_n on lukujen b_{n+1} ja b_{n-1} geometrinen keskiarvo (keskiverto).

Peräkkäisten jäsenten suhde on siis kaikilla indeksin arvoilla sama (=suhdeluku) ja voidaan merkitä

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Jono on siis geometrinen.