Yo-tehtävä S2011/11

11. Lukujonon (a_n) termit ovat muotoa

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Näytä, että $0 < a_n < \frac{1}{2}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Näytä, että $a_{n+1} > a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

a) Jonon a_n jokainen jäsen on selvästi positiivinen, koska $n > 0$. Jono on siis *alhaalta rajoitettu*.
Osoitetaan, että $a_n < \frac{1}{2}$, kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ jolloin jono on myös *ylhäältä rajoitettu*.

$$a_n = \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$$

(Osoittaja ja nimittäjä positiivisia)

$$2n < 2n + 1$$

$$0 < 1$$ aina tosi

Siis $a_n < \frac{1}{2}$ ja jono on *rajoitettu* (sekä alhaalta, että ylhäältä rajoitettu)

b) Osoitetaan, että $a_{n+1} > a_n$, kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ jolloin jono on aidosti kasvava.

Tapa I:

$$a_{n+1} > a_n$$

$$\frac{n+1}{2(n+1)+1} > \frac{n}{2n+1}$$

$$\frac{n+1}{2n+3} > \frac{n}{2n+1} \quad \Big|$$

(Osoittajat ja nimittäjät positiivisia)

$$(2n+1)(n+1) > n(2n+3)$$

$$2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n$$

$$1 > 0 \qquad \text{aina tosi}$$

Tapa II:

Tutkitaan funktiota $f(x) = \frac{x}{2x+1}$, missä $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x+1) - 2 \cdot x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0, \text{kun } \ x \geq 1$$

Derivaattafunktio f' on siis määrittelyjoukossaan positiivinen, joten funktio f on aidosti kasvava. Näin myös $a_n = f(n)$, $\ n = 1,2,3, \ldots$ on aidosti kasvava. (Voidaan osoittaa yleisesti, että kasvava ja ylhäältä rajoitettu jono suppenee.)

c) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$