YO-tehtävä:
K2013/*14

Olkoon $P(x) = x^2 + x - 2$.

a) Jaa $P(x)$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)

b) Määritä sellaiset vakiot A ja B, että $\dfrac{1}{P(x)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$ kaikilla $x \geq 2$. (2 p.)

c) Määritä funktion $\dfrac{1}{P(x)}$ integraalifunktiot, kun $x \geq 2$. (2 p.)

d) Laske epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{P(x)}\,dx$. (3 p.)

a) Ratkaistaan polynomin P nollakohdat: $x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ tai $x = -2$. Tekijöihin jako on siis $P(x) = 1 \cdot (x-1)\big(x-(-2)\big) = (x-1)(x+2)$.

a

b) Kyseessä on eräs integroimiskeino ns. *osamurtokehitelmä*. Kaikilla $x \geq 2$ pätee:

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{\overset{x+2)}{A}}{x-1} + \frac{\overset{x-1)}{B}}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-B}{x^2+x-2} = \frac{x(A+B)+2A-B}{x^2+x-2}$$

Vertaamalla osoittajia saadaan yhtälöpari: $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases}$ (alkuperäisessä muodossa ei osoittajassa x-termiä)

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $3A = 1$ eli $A = \frac{1}{3}$ ja edelleen sijoittamalla $B = -\frac{1}{3}$.

Siis $$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$$

c) $$\int \frac{1}{x^2 + x - 2}\, dx = \frac{1}{3} \int \cdot \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{3} \int \cdot \frac{1}{x+2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C = \frac{1}{3} \ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln\frac{x-1}{x+2} + C$$,kun $x \geq 2$.

d) Olkoon $s > 2$.

$$\int_2^s \frac{1}{P(x)}\, dx = \frac{1}{3} \Big/_{2}^{s} \ln\frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{s-1}{s+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{s-1}{s+2} + \ln 4\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln\frac{1-\frac{1}{s}}{1+\frac{2}{s}} + \ln 4\right) \longrightarrow \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{2}{3}\ln 2$$

$\searrow$ $\ln 1 = 0$, kun $s \to \infty$

Siis $$\int_2^\infty \frac{1}{P(x)}\, dx = \frac{2}{3}\ln 2\,.$$