t. 82, s. 51

Funktio f on derivoituva kohdassa $x = a$, jos *erotusosamäärällä* on raja-arvo tässä kohdassa. Erotusosamäärän raja-arvolle on kaksi esitysmuotoa:

Huom! Sivun 46 lauseen mukaan kohdassa a derivoituva funktio on välttämättä jatkuva tässä kohdassa.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{tai} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

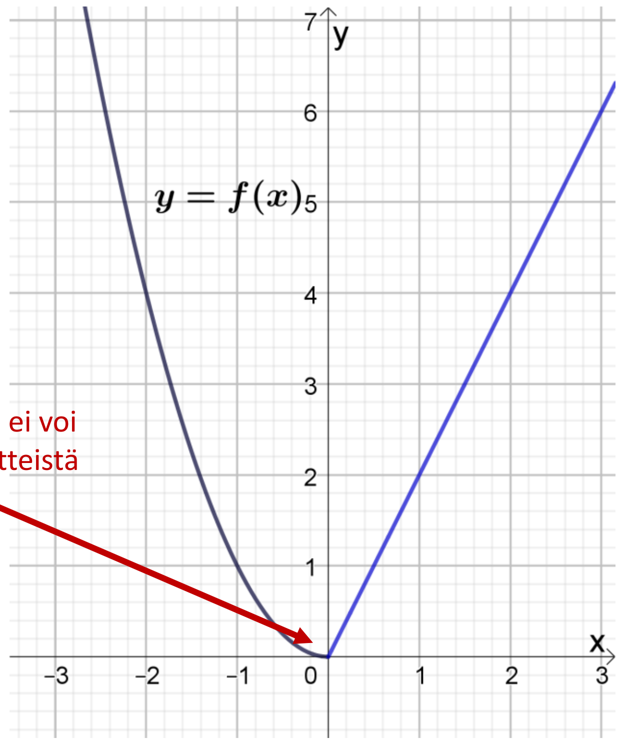
a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{kun } x < 0 \\ 2x, \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$

Lasketaan erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 - 2 \cdot 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0-} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x - 2 \cdot 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0+} 2 = 2$$

Erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot ovat erisuuria, joten erotusosamäärän raja-arvoa ei ole määritelty.
Funktio f ei siis ole derivoituva kohdassa $x = 0$.



Kohtaan $x = 0$ ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{kun } x \leq 0 \\ 2x^2, \text{kun } x > 0 \end{cases}$

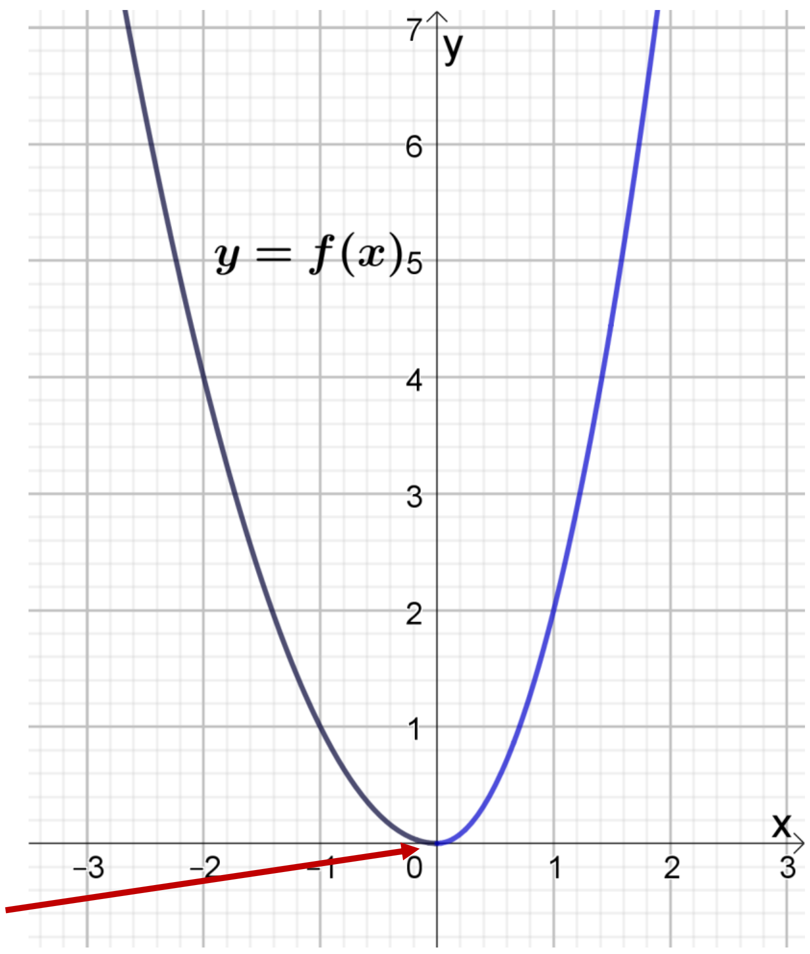
Lasketaan erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0-} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x^2 - 0^2}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0+} 2x = 0$$

Erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuria $(= 0)$, joten f on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$



Kohtaan $x = 0$ voi piirtää yksikäsitteisen (vaakasuoran) tangentin.