t. 70, s. 41

a) Oletusta $f(a+b) = f(a)f(b)$ täytyy pystyä hyödyntämään.
Esitetään siis $f(0)$ summana $f(0+0)$.

$$f(0) = f(0+0) = f(0)f(0) = f(0)^2$$

$$\Leftrightarrow f(0)(f(0)-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ tai } f(0) = 1$$

Hyödynnetään seuraavaksi toista oletusta eli tietoa, että f ei ole nollafunktio.

Jos $f(0) = 0$, niin $f(a) = f(a+0) = f(a)f(0) = f(a) \cdot 0 = 0$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

Täytyy siis olla $f(0) = 1$.

b) Oletus:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

Pitää osoittaa, että $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 0} f(a+x) = \lim_{x \to 0} f(a)f(x) = f(a) \lim_{x \to 0} f(x) = f(a) \cdot 1 = f(a).$$

Funktio f on siis jatkuva kaikkialla.

c) Esimerkiksi käy mikä tahansa eksponenttifunktio $f(x) = k^x,\ k > 0$,
sillä potenssin laskusääntöjen mukaisesti

$$f(a+b) = k^{a+b} = k^a k^b = f(a)f(b).$$

Funktio voi siis olla myös vakiofunktio $f(x) = 1$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (tapaus $k = 1.$)