t. 66, s. 40

Määritä vakiot a ja b niin, että funktio $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + a}{x - 1} & \text{, kun } x < 1 \\ x + b & \text{, kun } x \geq 1 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa 1.

Ratkaisu:

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 1$, jos ja vain jos $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Siis funktion f raja-arvon kohdassa 1 täytyy olla olemassa ja tämän arvon on oltava $f(1)$.

Tutkitaan raja-arvoa kohdassa 1 molemmilta puolilta:

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 1 + b = f(1)$. ($f$ on oikeanpuoleisesti jatkuva)

Jotta raja-arvo olisi olemassa, vasemmanpuoleisen raja-arvon täytyy olla yhtä suuri.

Vasemmalta puolelta raja-arvokohta on nimittäjän nollakohta. Vasemmanpuoleinen raja-arvo voi olla olemassa vain jos osoittajalla on sama nollakohta.

Sijoittamalla $x = 1$ osoittajaan saadaan täten ehto

$$3 \cdot 1^2 + a = 0$$
$$a = -3$$

Tällöin

$$\frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{3(x + 1)\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x - 1}} = 3(x + 1) \longrightarrow 3(1 + 1) = 6,$$

kun $x \longrightarrow 1-$.

Vasemmanpuoleinen raja-arvo on siis olemassa ja tämä arvo on 6.

Myös oikean puolen raja-arvon täytyy olla yhtä suuri:

$$1 + b = 6 \quad \Leftrightarrow \quad b = 5.$$

Vakioiden arvoilla $a = -3$ ja $b = 5$ raja-arvo $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 6$ on siis olemassa.

Myös $f(1) = 1 + b = 1 + 5 = 6$, joten funktio f on jatkuva kohdassa 1.

<u>V: Vakioiden arvojen täytyy olla $a = -3$ ja $b = 5$.</u>