

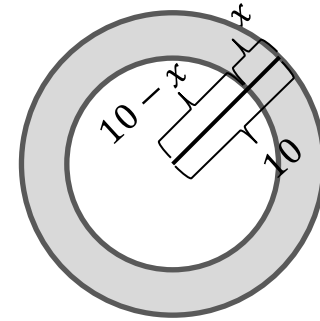
t. 217, s. 133

Koska tehtävässä tutkitaan vain tauluun osuneita tikkoja ja tikat heitetään umpimähkään, niin todennäköisyys voidaan laskea geometrisesti pinta-alan avulla.

Kertymäfunktio F kuvaa todennäköisyyttä sille, että tikka osuu etäisyydelle x tai lähemmäs taulun reunaa (harmaa rengas kuviossa). Voidaan siis merkitä $F(x) = P(\underline{x} \leq x)$.

Todennäköisyys $P(\underline{x} \leq x)$, kun $0 \leq x \leq 10$, saadaan renkaan pinta-alan suhteena koko pinta-alaan:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\underline{x} \leq x) = \frac{\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot (10-x)^2}{\pi \cdot 10^2} \\ &= \frac{100 - (100 - 20x + x^2)}{100} = \frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} \end{aligned}$$



(yksiköt senttimetrejä).

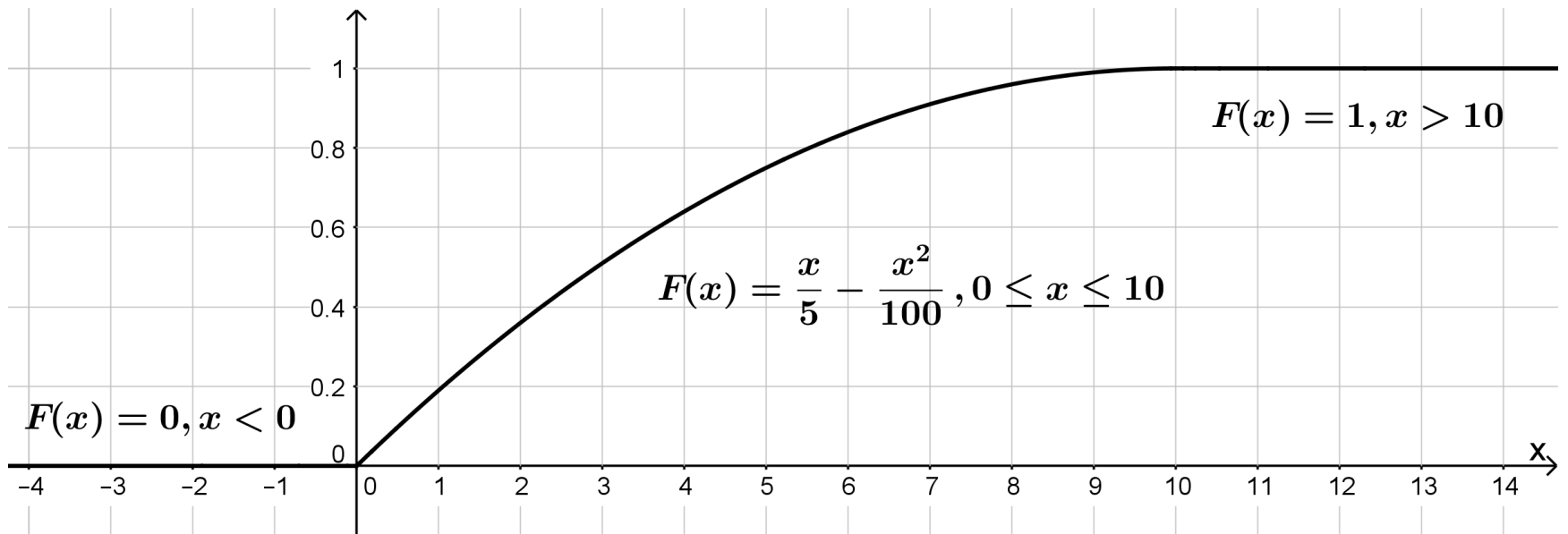
Renkaan pinta-ala on $\pi \cdot 10^2 - \pi \cdot (10-x)^2$.

Koko taulun pinta-ala on $\pi \cdot 10^2$.

Tarkistus: $F(0) = 0$, $F(10) = 1$

Kertymäfunktio voidaan määritellä kaikille reaaliluvuille seuraavasti:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ kun } x < 0 \\ \frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} & , \text{ kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & , \text{ kun } x > 10 \end{cases}$$



Tiheysfunktio f on kertymäfunktion derivaatta.

Kun $x < 0$ tai $x > 10$ kertymäfunktio F on vakio, joten $f(x) = 0$.

Kun $0 < x < 10$, $f(x) = D\left(\frac{x}{5} - \frac{x^2}{100}\right) = \frac{1}{5} - \frac{x}{50}$.

Odotusarvo (laskimella)

$$E(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{10} x\left(\frac{1}{5} - \frac{x}{50}\right)dx = \frac{10}{3}$$

Varianssi (laskimella)

$$D^2(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(\underline{x}))^2 f(x) dx = \int_0^{10} \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{x}{50}\right) dx = \frac{50}{9}$$

$$\text{Keskihajonta } D(\underline{x}) = \sqrt{D^2(\underline{x})} = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

Vastaukset:

$$\text{Kertymäfunktio } F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ kun } x < 0 \\ \frac{x}{5} - \frac{x^2}{100} & , \text{ kun } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & , \text{ kun } x > 10 \end{cases}$$

$$\text{Tiheysfunktio } f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ kun } x < 0 \\ \frac{1}{5} - \frac{x}{50} & , \text{ kun } 0 < x < 10 \\ 0 & , \text{ kun } x > 10 \end{cases}$$

$$\text{Odotusarvo } \frac{10}{3} \approx 3,33, \text{ keskihajonta } \frac{5\sqrt{2}}{3} \approx 2,36.$$