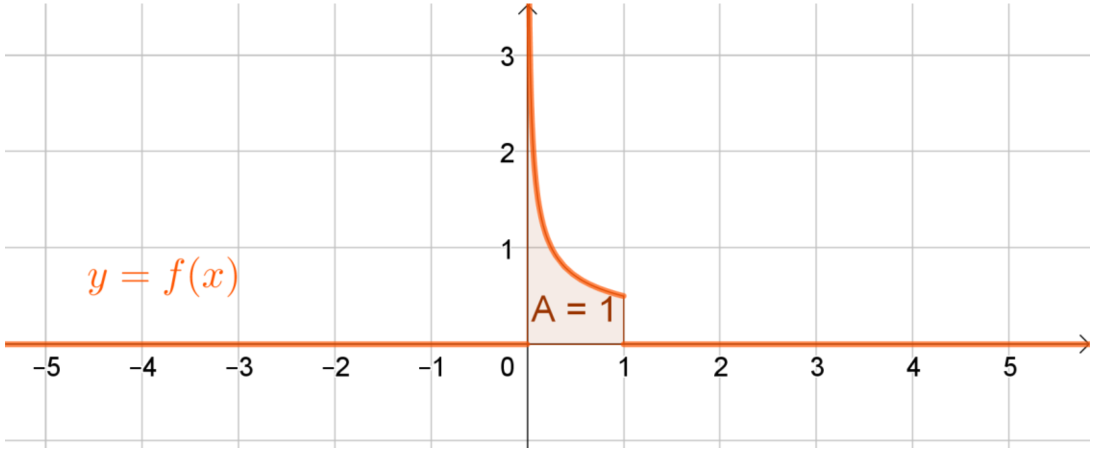
t. 212, s. 133

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{kun } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

a) Funktio $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on jonkin jatkuvan satunnaismuuttujan X *tiheysfunktio* (katso s. 121), jos

1. $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$



(1.) Selvästi $f(x) \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla.

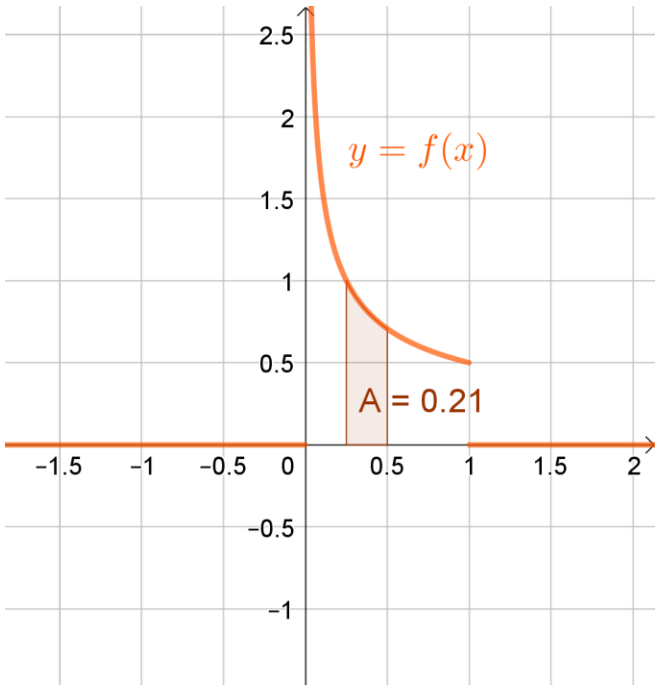
(2.) Osoitetaan, että funktion kuvaajan $y = f(x)$ ja x —akselin rajaama pinta-ala on yksi.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$ (koska $f(x) = 0$ välin $]0,1]$ ulkopuolella)

Kyseessä on epäoleellinen integraali, koska $x = 0$ ei kuulu integroitavan funktion määrittelyjoukkoon. Merkitään alarajaksi s ja tutkitaan raja-arvoa, kun $s \longrightarrow 0$.

$$\int_s^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \int_s^1 \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \Big/_{s}^{1} \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = \Big/_{s}^{1} \sqrt{x} = \sqrt{1} - \sqrt{s} \longrightarrow 1, \text{ kun } s \longrightarrow 0$$

Siis $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, joten f on tiheysfunktio.



Tiheysfunktion avulla voidaan laskea todennäköisyyksiä:

$$P(0{,}25 \leq X \leq 0{,}5) = \int_{0{,}25}^{0{,}5} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \Big/_{0{,}25}^{0{,}5} \sqrt{x} =$$

$$\sqrt{0{,}5} - \sqrt{0{,}25} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \approx \underline{\underline{0{,}21}}$$

b) Jatkuvan satunnaismuuttujan X odotusarvo $E(X)$ saadaan epäoleellisesta integraalista

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx\,.$$

(Katso s. 122. Jos integraali ei suppene, satunnaismuuttujalla X ei ole odotusarvoa.)

$$E(X) = \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\,dx = \Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} =$$

$$\Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{3}x\sqrt{x} = \frac{1}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$