t. 156, s.91

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \qquad (x > 0)$$

Osoitetaan derivaatan avulla, että funktio *f* on aidosti kasvava positiivisilla muuttujan arvoilla:

$$f'(x) = \frac{D(x^3 - 1)(x^2 + 1) - D(x^2 + 1)(x^3 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x(x^3 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Derivaatta on selvästi positiivinen kaikilla $x > 0$, joten funktio *f* on aidosti kasvava, kun $x > 0$. Siis funktiolla *f* on käänteisfunktio f^{-1}.

Käytetään käänteisfunktion derivointikaavaa:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

Koska $f(1) = 0$, niin $f^{-1}(0) = 1$.

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1 : \left(\frac{1 + 3 + 2}{(1 + 1)^2}\right) = 1 : \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$