

## t. 100, s. 52

Tehtävän (lähtö)oletukset:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Funktion argumentiksi on muokattava summalauseke

$$f(a + b) = f(a) + f(b) + 2ab \quad (1.)$$

$$f'(0) = 3 \quad (2.)$$

Miten annettuja "vihjeitä" voisi hyödyntää?

a)  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0$

$$f(0) = 2f(0)$$

$$f(0) = 0$$

b) Muodostetaan derivaatan lauseke erotusosamäärän raja-arvona

Käytetään "h-muotoa" erotusosamäärästä, koska siihen voi soveltaa oletusta 1.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2x$$

Mihin oletusta 2. tarvitaan? Miten  $f'(0)$  voidaan kirjoittaa? Onko a-kohdan tuloksesta apua?

a-kohdan ja oletuksen 2 perusteella:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 3$$

Siis

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2x = 2x + 3$$

c) Funktio  $f$  saadaan integroimalla:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x + 3) dx = x^2 + 3x + C$$

Määritetään vielä vakio  $C$  (a-kohdan perusteella):

$$f(0) = C = 0$$

Kysytty funktio on siis  $f(x) = x^2 + 3x$