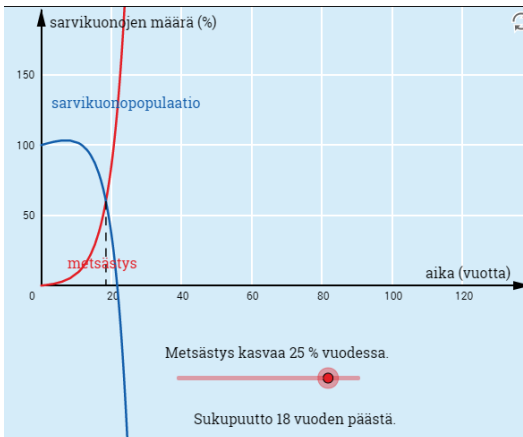


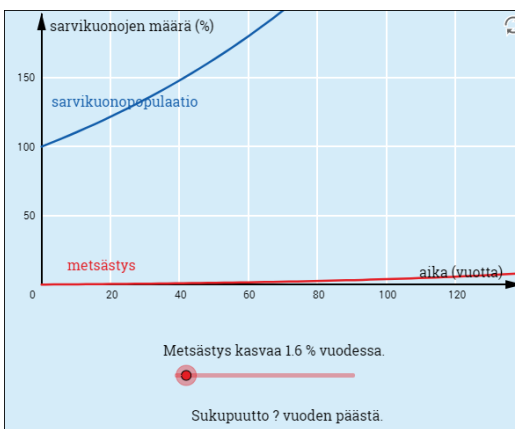
# 3 FUNKTION KULKU

## POHDITTAVAA

1. Huomataan, että metsästyksen kasvaessa 25 % vuodessa sarvikuonopopulaatio kohtaa sukupuuton 18 vuoden päästä.



Muutamalla metsästyksen kasvuprosenttia havaitaan, että populaatio pelastuu sukupuutolta, jos metsästys kasvaa korkeintaan 1,6 % vuodessa.



Vastaus: Sukupuutto 18 vuoden päästä; 1,6 %

2. Muodostetaan afrikannorsujen määristä yhtälö ja ratkaistaan siitä kasvukerroin  $q$ .

$$500\,000q^{20} = 1\,000\,000 \quad || :500\,000$$

$$q^{20} = 2$$

$$q = \sqrt[20]{2}$$

$$q = 1,0352\dots$$

Populaation on kasvettava vuosittain 1,0352...-kertaiseksi, joten vuosittainen kasvu on oltava  $103,52\dots\% - 100\% = 3,52\dots\% \approx 3,5\%$ .

Vastaus: 3,5 %

## 3.1 Epäyhtälö ja funktion merkki

### ALOITA PERUSTEISTA

- 301.** Merkkikaaviosta havaitaan, että funktio  $f$  saa positiivisia arvoja, kun  $0 < x < 10$ .

Vastaus:  $0 < x < 10$

- 302. a)** Kuvaajasta nähdään, että kuvaaja kulkee  $x$ -akselin yläpuolella, kun  $x > 1$ .  
Näin ollen funktion  $f$  arvot ovat positiivisia, kun  $x > 1$ .

Vastaus:  $x > 1$

- b)** Kuvaajasta nähdään, että kuvaaja kulkee  $x$ -akselin yläpuolella, kun  $x < 4$ .  
Näin ollen funktion  $f$  arvot ovat positiivisia, kun  $x < 4$ .

Vastaus:  $x < 4$

- 303. a)** Havaitaan, että kuvaaja  $y = g(x)$  leikkaa  $x$ -akselin kohdassa  $x = 3$  ja kulkee  $x$ -akselin alapuolella, kun  $x > 3$ .  
Näin ollen epäyhtälön  $g(x) \leq 0$  ratkaisu on  $x \geq 3$ .

Vastaus:  $x \geq 3$

- b)** Havaitaan, että kuvaaja  $y = g(x)$  leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $x = -1$  ja  $x = 2$ . Lisäksi kuvaaja kulkee  $x$ -akselin alapuolella, kun  $-1 < x < 2$ .  
Näin ollen epäyhtälön  $g(x) \leq 0$  ratkaisu on  $-1 \leq x \leq 2$ .

Vastaus:  $-1 \leq x \leq 2$

- c)** Havaitaan, että kuvaaja  $y = g(x)$  leikkaa  $x$ -akselin kohdissa  $x = -3$  ja  $x = 1$ . Lisäksi kuvaaja kulkee  $x$ -akselin alapuolella, kun  $x < -3$  ja kun  $x > 1$ . Näin ollen epäyhtälön  $g(x) \leq 0$  ratkaisu on  $x \leq -3$  tai  $x \geq 1$ .

Vastaus:  $x \leq -3$  tai  $x \geq 1$

304. a) Funktion  $f$  ainoa nollakohta on  $x = 3$  ja lisäksi tiedetään, että  $f(2) = 6$  ja  $f(4) = -1$ . Tästä voidaan päätellä funktion saavan positiivisia arvoja, kun  $x < 3$  ja negatiivisia arvoja, kun  $x > 3$ . Täydennetään funktion  $f$  merkkikaavio.

	3		
$f(x)$	+		-

Vastaus:

	3		
$f(x)$	+		-

- b) Funktion  $f$  nollakohdat ovat  $x = 4$  ja  $x = 6$  ja lisäksi tiedetään, että  $f(3) < 0$ ,  $f(5) > 0$  ja  $f(7) < 0$ . Näin ollen funktion merkki on nollakohdan  $x = 4$  vasemmalla puolella negatiivinen, sitten positiivinen ja nollakohdan  $x = 6$  oikealla puolella negatiivinen. Täydennetään funktion  $f$  merkkikaavio.

	4		6		
$f(x)$	-		+		-

Vastaus:

	4		6		
$f(x)$	-		+		-

- 305. a)** Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saa negatiivisia arvoja, kun  $x > 6$ .

Näin ollen epäyhtälön  $f(x) < 0$  ratkaisu on  $x > 6$ .

Vastaus:  $x > 6$

- b)** Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saa negatiivisia arvoja, kun  $x < -3$  tai  $x > 2$ .

Näin ollen epäyhtälön  $f(x) < 0$  ratkaisu on  $x < -3$  tai  $x > 2$ .

Vastaus:  $x < -3$  tai  $x > 2$

- c)** Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saa negatiivisia arvoja, kun  $-5 < x < 4$ .

Näin ollen epäyhtälön  $f(x) < 0$  ratkaisu on  $-5 < x < 4$ .

Vastaus:  $-5 < x < 4$

**306. a)** Ratkaistaan funktion  $f(x) = 4x - 12$  nollakohta yhtälöllä

$$\begin{aligned}4x - 12 &= 0 \\4x &= 12 \quad ||:4 \\x &= 3\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = 3$

**b)** Lasketaan funktion arvo nollakohdan vasemmalla puolella olevassa kohdassa, esimerkiksi kohdassa  $x = 2$ .

$$f(2) = 4 \cdot 2 - 12 = -4$$

Lasketaan funktion arvo nollakohdan oikealla puolella olevassa kohdassa, esimerkiksi kohdassa  $x = 4$ .

$$f(4) = 4 \cdot 4 - 12 = 4$$

Vastaus: esim.  $f(2) = -4$  ja  $f(4) = 4$

**c)** Laaditaan a- ja b-kohtien tulosten avulla funktion  $f$  merkkikaavio.

3	
$f(x)$	-
-	+

Vastaus:

3	
$f(x)$	-
-	+

307. a) Määritetään funktion  $g(x) = 6x - 8$  nollakohta.

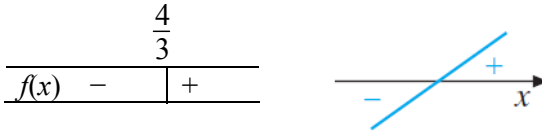
$$\begin{aligned}6x - 8 &= 0 \\6x &= 8 && || :6 \\x &= \frac{8}{6} \\x &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Vastaus:  $x = \frac{4}{3}$

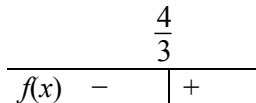
b) Funktion  $g(x) = 6x - 8$  kuvaaja on nouseva suora, koska kulmakerroin on positiivinen.

Vastaus: nouseva

c) Laaditaan funktion  $g(x) = 6x - 8$  merkkikaavio a- ja b-kohtien avulla. Funktio vaihtaa nollakohdassaan merkkinsä negatiivisesta positiiviseksi, koska nousevan suoran pisteiden  $y$ -koordinaatit ovat negatiivisia suoran ja  $x$ -akselin leikkauskohdan vasemmalla puolella.



Vastaus:



**308.** a) Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $3x - 12$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 3x - 12$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned}3x - 12 &= 0 \\3x &= 12 \quad ||: 3 \\x &= 4\end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 4$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

$$f(0) = 3 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 4$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 6$ .

$$f(6) = 3 \cdot 6 - 12 = 6 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

4		
$f(x)$	-	+

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = 3x - 12$  arvo on nolla tai positiivinen nollakohdassaan  $x = 4$  tai sen oikealla puolella, joten epäyhtälön  $3x - 12 \geq 0$  ratkaisu on  $x \geq 4$ .

Vastaus:  $x \geq 4$

- b) Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $-4x - 20$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = -4x - 20$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -4x - 20 &= 0 \\ -4x &= 20 \quad ||: (-4) \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = -5$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = -6$ .

$$f(-6) = -4 \cdot (-6) - 20 = 4 > 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = -5$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

$$f(0) = -4 \cdot 0 - 20 = -20 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

-5	
$f(x)$	+
	-

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = -4x - 20$  arvo on negatiivinen nollakohdan  $x = -5$  oikealla puolella, joten epäyhtälön  $-4x - 20 < 0$  ratkaisu on  $x > -5$ .

Vastaus:  $x > -5$

- c) Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $10x$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 10x$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} 10x &= 0 && ||:10 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 0$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = -1$ .

$$f(-1) = 10 \cdot (-1) = -10 < 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 0$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 1$ .

$$f(1) = 10 \cdot 1 = 10 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

0		
$f(x)$	-	+

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = 10x$  arvo positiivinen nollakohdan  $x = 0$  oikealla puolella, joten epäyhtälön  $10x > 0$  ratkaisu on  $x > 0$ .

Vastaus:  $x > 0$

309. a) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$-6x < 24$$

$$-6x - 24 < 0$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $-6x - 24$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = -6x - 24$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$-6x - 24 = 0$$

$$-6x = 24 \quad || :(-6)$$

$$x = -4$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = -4$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = -5$ .

$$f(-5) = -6 \cdot (-5) - 24 = 6 > 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = -4$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

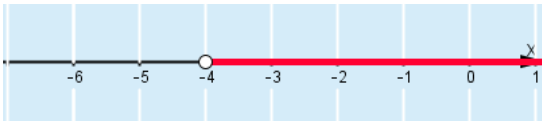
$$f(0) = -6 \cdot 0 - 24 = -24 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

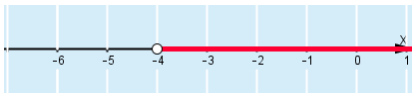
	-4	
$f(x)$	+	-

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = -6x - 24$  arvo on negatiivinen nollakohdan  $x = -4$  oikealla puolella, joten epäyhtälön  $-6x < 24$  ratkaisu on  $x > -4$ .

Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus:  $x > -4$ ,



b) Avataan epäyhtälöstä sulkeet.

$$2(x-4) \geq 0$$

$$2x - 8 \geq 0$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $2x - 8$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 2x - 8$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$2x - 8 = 0$$

$$2x = 8 \quad || :2$$

$$x = 4$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 4$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 4$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 5$ .

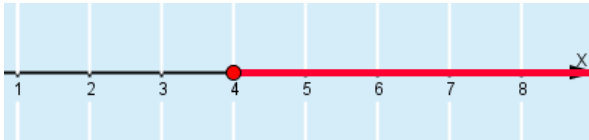
$$f(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 2 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

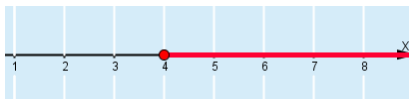
4		
$f(x)$	-	+

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = 2x - 8$  arvo on nolla tai positiivinen nollakohdassaan  $x = 4$  tai sen oikealla puolella, joten epäyhtälön  $2(x - 4) \geq 0$  ratkaisu on  $x \geq 4$ .

Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus:  $x \geq 4$ ,



- c) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$-3x \leq x$$

$$-3x - x \leq 0$$

$$-4x \leq 0$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $-4x$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = -4x$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$-4x = 0 \quad || :(-4)$$

$$x = 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 0$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = -1$ .

$$f(-1) = -4 \cdot (-1) = 4 > 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 0$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 1$ .

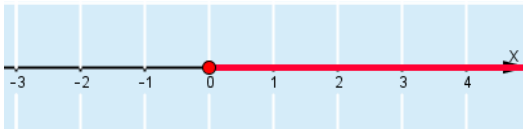
$$f(1) = -4 \cdot 1 = -4 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

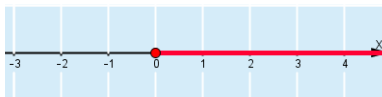
$f(x)$	+		-
$0$			

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = -4x$  arvo on nolla tai negatiivinen nollakohdassaan  $x = 0$  tai sen oikealla puolella, joten epäyhtälön  $-3x \leq x$  ratkaisu on  $x \geq 0$ .

Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus:  $x \geq 0$ ,



310. a) Määritetään funktion  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  nollakohdat.

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Funktion nollakohdat ovat  $x = \frac{3-5}{2} = -1$  ja  $x = \frac{3+5}{2} = 4$ .

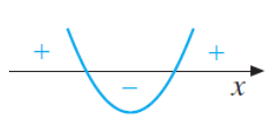
Vastaus:  $x = -1$  ja  $x = 4$

- b) Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen.

Vastaus: ylöspäin

- c) Laaditaan funktion  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  merkkikaavio a- ja b-kohtien avulla. Funktion arvot ovat nollakohtien välissä negatiivisia, koska ylöspäin aukeavan paraabelin  $y$ -koordinaatit ovat negatiivisia, kun  $x$ -koordinaatti paraabelin ja  $x$ -akselin leikkauskohtien välissä.

	-1	4	
$f(x)$	+	-	+



Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö  $x^2 - 3x - 4 \leq 0$  toteutuu, kun  $-1 \leq x \leq 4$ .

Vastaus:  $-1 \leq x \leq 4$

## VAHVISTA OSAAMISTA

**311.** Merkkikaaviosta A nähdään, että funktio  $g(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $x < 1$ , joten epäyhtälön  $g(x) > 0$  ratkaisu on  $x < 1$ . Tällöin merkkikaavio A ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta B nähdään, että funktio  $g(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $x < 1$  tai  $x > 5$ , joten epäyhtälön  $g(x) > 0$  ratkaisu on  $x < 1$  tai  $x > 5$ . Tällöin merkkikaavio B ja ratkaisu III kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta C nähdään, että funktio  $g(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $1 < x < 5$ , joten epäyhtälön  $g(x) > 0$  ratkaisu on  $1 < x < 5$ . Tällöin merkkikaavio C ja ratkaisu IV kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta D nähdään, että funktio  $g(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $x < 1$  tai  $1 < x < 5$ , joten epäyhtälön  $g(x) > 0$  ratkaisu on  $x < 1$  tai  $1 < x < 5$ . Tällöin merkkikaavio D ja ratkaisu V kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta E nähdään, että funktio  $g(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $x < 5$ , joten epäyhtälön  $g(x) > 0$  ratkaisu on  $x < 5$ . Tällöin merkkikaavio E ja ratkaisu II kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta F nähdään, että funktio  $g(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $x < 1$ , joten epäyhtälön  $g(x) > 0$  ratkaisu on  $x < 1$ . Tällöin merkkikaavio F ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: I, B: III, C: IV, D: V, E: II ja F: I

312. a) Tiedetään, että  $f(x) > 0$ , kun  $x > 1$ , joten funktio saa positiivisia arvoja, kun  $x > 1$  ja negatiivisia arvoja, kun  $x < 1$ . Laaditaan funktion merkkikaavio.

$f(x)$	-		+
1			

Vastaus:

$f(x)$	-		+
1			

- b) Tiedetään, että  $f(x) > 0$ , kun  $x < 3$ , joten funktio saa positiivisia arvoja, kun  $x < 3$  ja negatiivisia arvoja, kun  $x > 3$ . Laaditaan funktion merkkikaavio.

$f(x)$	+		-
3			

Vastaus:

$f(x)$	+		-
3			

- c) Tiedetään, että  $f(x) > 0$ , kun  $-5 < x < 1$ , joten funktio saa positiivisia arvoja, kun  $-5 < x < 1$ , ja negatiivisia arvoja, kun  $x < -5$  tai  $x > 1$ . Laaditaan funktion merkkikaavio.

$f(x)$	-	+		-
-5		1		

Vastaus:

$f(x)$	-	+		-
-5		1		

- d) Tiedetään, että  $f(x) > 0$ , kun  $x < -4$  tai  $x > 6$ , joten funktio saa positiivisia arvoja, kun  $x < -4$  tai  $x > 6$ , ja negatiivisia arvoja, kun  $-4 < x < 6$ . Laaditaan funktion merkkikaavio.

$f(x)$	+	-		+
-4		6		

Vastaus:

$f(x)$	+	-		+
-4		6		

313. a) Ratkaistaan funktion  $f(x) = -x$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -x &= 0 && \text{||:}(-1) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 0$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = -1$ .

$$f(-1) = -(-1) = 1 > 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 0$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 1$ .

$$f(1) = -1 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

0		
$f(x)$	+	-

Vastaus:

0		
$f(x)$	+	-

- b) Ratkaistaan funktion  $f(x) = \frac{1}{3}x - 6$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\frac{1}{3}x - 6 = 0$$

$$\frac{1}{3}x = 6 \quad || \cdot 3$$

$$x = 18$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 18$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

$$f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = 18$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 21$ .

$$f(21) = \frac{1}{3} \cdot 21 - 6 = 1 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

18		
$f(x)$	-	+

Vastaus:

18		
$f(x)$	-	+

- c) Ratkaistaan funktion  $f(x) = -\frac{5}{7}x - 2$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{7}x - 2 &= 0 \\ -\frac{5}{7}x &= 2 \quad ||: \left(-\frac{5}{7}\right) \\ x &= 2 : \left(-\frac{5}{7}\right) \\ x &= -2 \cdot \frac{7}{5} \\ x &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = -\frac{14}{5} = -2\frac{4}{5}$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = -7$ .

$$f(-3) = -\frac{5}{7} \cdot (-7) - 2 = 3 > 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = -\frac{14}{5}$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

$$f(0) = -\frac{5}{7} \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

$$\begin{array}{c|c} \frac{14}{5} & \\ \hline f(x) & + \quad | \quad - \end{array}$$

Vastaus:

$$\begin{array}{c|c} \frac{14}{5} & \\ \hline f(x) & + \quad | \quad - \end{array}$$

314. a) Funktion  $f(x) = -x^2 + 7x - 12$  nollakohdat ratkaistaan yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$-x^2 + 7x - 12 = 0$$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälöstä poimitut kertoimet  $a = -1$ ,  $b = 7$  ja  $c = -12$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-7 \pm 1}{-2}$$

$$x = \frac{-7+1}{-2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-7-1}{-2} = 4$$

Koska funktion  $f$  kuvaaja on alapäin aukeava paraabeli, saa funktio  $f$  positiivisia arvoja nollakohtiensa välissä ja negatiivisia arvoja nollakohdan  $x = 3$  vasemmalla sekä nollakohdan  $x = 4$  oikealla puolella.

Laaditaan merkkikaavio.

	3	4	
$f(x)$	-	+	-

Vastaus:

	3	4	
$f(x)$	-	+	-

- b) Funktion  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$  nollakohdat ratkaistaan yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälöstä poimitut kertoimet  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = -2$ , ja  $c = 4$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4}}{2 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{\frac{1}{2}}$$

$$x = 4$$

Funktion  $f$  kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa  $x$ -akselia, joten  $f$  saa positiivisia arvoja kaikkialla muualla paitsi kohdassa  $x = 4$  arvon 0.

Laaditaan merkkikaavio.

$$\begin{array}{c} 4 \\ \hline f(x) \quad + \quad | \quad + \end{array}$$

Vastaus:

$$\begin{array}{c} 4 \\ \hline f(x) \quad + \quad | \quad + \end{array}$$

315. a) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\begin{aligned}4(2x - 3) &< x + 5 \\8x - 12 &< x + 5 \\7x - 17 &< 0\end{aligned}$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $7x - 17$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 7x - 17$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned}7x - 17 &= 0 \\7x &= 17 \quad ||:7 \\x &= \frac{17}{7}\end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .

$$f(0) = 7 \cdot 0 - 17 = -17 < 0$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = \frac{17}{7}$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 3$ .

$$f(3) = 7 \cdot 3 - 17 = 4 > 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

$$\begin{array}{c} \frac{17}{7} \\ \hline f(x) \quad - \quad | \quad + \end{array}$$

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = 7x - 17$  arvo on negatiivinen nollakohdan  $x = \frac{17}{7}$  vasemmalla puolella, joten epäyhtälön  $4(2x - 3) < x + 5$  ratkaisu on  $x < \frac{17}{7}$ .

$$\text{Vastaus: } x < \frac{17}{7}$$



b) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\begin{aligned}x - 2(5 - x) &> -3(x + 1) \\x - 10 + 2x &> -3x - 3 \\6x - 7 &> 0\end{aligned}$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $6x - 7$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 6x - 7$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned}6x - 7 &= 0 \\6x &= 7 \quad ||:6 \\x &= \frac{7}{6}\end{aligned}$$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = \frac{7}{6}$  vasemmalla puolella olevassa kohdassa  $x = 0$ .  
 $f(0) = 6 \cdot 0 - 7 = -7 < 0$

Lasketaan funktion  $f$  arvo nollakohdan  $x = \frac{7}{6}$  oikealla puolella olevassa kohdassa  $x = 2$ .  
 $f(2) = 6 \cdot 2 - 7 = 5 > 0$

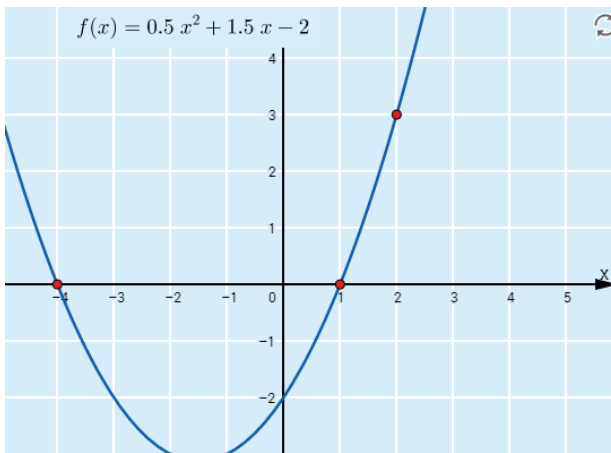
Laaditaan merkkikaavio.

		$\frac{7}{6}$	
$f(x)$	-		+

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion  $f(x) = 6x - 7$  arvo on positiivinen nollakohdan  $x = \frac{7}{6}$  oikealla puolella, joten epäyhtälön  $x - 2(5 - x) > -3(x + 1)$  ratkaisu on  $x > \frac{7}{6}$ .

Vastaus:  $x > \frac{7}{6}$

316. Siirtämällä pisteitä saadaan esimerkiksi funktio  $f(x) = 0,5x^2 + 1,5x - 2$ , jonka arvot ovat negatiivisia vain kun  $-4 < x < 1$ .



Vastaus: esim.  $f(x) = 0,5x^2 + 1,5x - 2$

317. a) Määritetään merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$  nollakohdat yhtälön  $-x^2 + 4x - 3 = 0$  avulla. Sijoitetaan  $a = -1$ ,  $b = 4$  ja  $c = -3$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$$

Nollakohdat ovat siis  $x = \frac{-4 + 2}{-2} = 1$  ja  $x = \frac{-4 - 2}{-2} = 3$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

	1	3		$f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$
$f(x)$	-	+	-	$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$
				$f(4) = -4^2 + 4 \cdot 4 - 3 = -3 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön  $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$  ratkaisu on  $1 \leq x \leq 3$ .

Vastaus:  $1 \leq x \leq 3$ ,

- b) Lasketaan merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  nollakohdat yhtälön  $x^2 - 2x + 3 = 0$  avulla.  
Sijoitetaan  $a = 1$ ,  $b = -2$  ja  $c = 3$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten funktiolla ei ole nollakohtia eikä funktio vaihda merkkiään.

Lasketaan funktion  $f$  arvo jollakin muuttujan  $x$  arvolla.

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$ , joten funktio saa vain positiivisia arvoja.

Laaditaan merkkikaavio.

$$\overline{f(x) \quad +}$$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön  $x^2 - 2x + 3 > 0$  ratkaisuja ovat kaikki reaaliluvut.

Vastaus: kaikki reaaliluvut

318. a) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$x^2 - 3 \leq 2 - 4x$$

$$x^2 + 4x - 5 \leq 0$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $x^2 + 4x - 5$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

Nollakohdat ovat siis  $x = \frac{-4+6}{2} = 1$  ja  $x = \frac{-4-6}{2} = -5$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

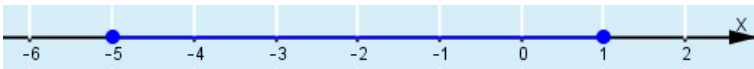
	-5	1	
<u><math>f(x)</math></u>	+	-	+

$$f(-6) = (-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 5 = 7 > 0$$

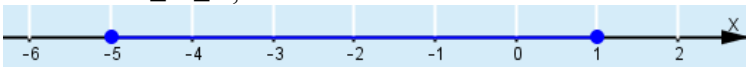
$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$$

$$f(2) = 2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = 7 > 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön  $x^2 - 3 \leq 2 - 4x$  ratkaisu on  $-5 \leq x \leq 1$ . Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus:  $-5 \leq x \leq 1$ ,



b) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\begin{aligned} 4 - 2(x^2 - 1) &< -3x + 6 \\ 4 - 2x^2 + 2 &< -3x + 6 \\ -2x^2 + 3x &< 0 \end{aligned}$$

Merkitään yhtälön vasemman puolen lauseketta  $-2x^2 + 3x$  funktiolla  $f(x)$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = -2x^2 + 3x$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x &= 0 \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}}{2 \cdot (-2)} \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{-4} \\ x &= \frac{-3 \pm 3}{-4} \end{aligned}$$

Nollakohdat ovat siis  $x = \frac{-3+3}{-4} = 0$  ja  $x = \frac{-3-3}{-4} = \frac{3}{2}$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

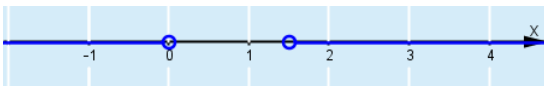
	$0$	$\frac{3}{2}$			
$f(x)$	-		+		-

$$f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -5 < 0$$

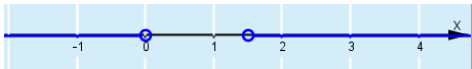
$$f(1) = -2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 1 > 0$$

$$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = -2 < 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön  $4 - 2(x^2 - 1) < -3x + 6$  ratkaisu on  $x < 0$  tai  $x > \frac{3}{2}$ . Merkitään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus:  $x < 0$  tai  $x > \frac{3}{2}$ ,



**319.** Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saa positiivisia arvoja, kun  $x \neq -2$ , joten epäyhtälö A ja ratkaisu II kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  ei saa negatiivisia arvoja, joten epäyhtälö B ja ratkaisu III kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saa positiivisia arvoja tai arvon nolla kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla, joten epäyhtälö C ja ratkaisu IV kuuluvat yhteen.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio  $f(x)$  saa negatiivisia arvoja tai arvon nolla, kun  $x = -2$ , joten epäyhtälö D ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III, C: IV ja D: I

**320.** Kuvaajasta A havaitaan, että funktion  $f(x)$  arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla välillä  $-2 \leq x \leq 1$ , joten kuvaaja A ja ratkaisu II kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta B havaitaan, että funktion  $f(x)$  arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla, kun  $x \leq -2$  tai  $x \geq 1$ , joten kuvaaja B ja ratkaisu III kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta C havaitaan, että funktion  $f(x)$  arvot ovat pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla, joten kuvaaja C ja ratkaisu V kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta D havaitaan, että funktion  $f(x)$  arvot ovat aina suurempia kuin nolla eli funktio  $f$  ei saa millään muuttujan arvolla negatiivista arvoa, joten kuvaaja D ja ratkaisu IV kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta E havaitaan, että funktion  $f(x)$  arvot ovat aina suurempia tai yhtä suuria kuin nolla ja vain kohdassa  $x = 2$  arvon 0, joten kuvaaja E ja ratkaisu I kuuluvat yhteen.

Kuvaajasta F havaitaan, että funktion  $f(x)$  arvot ovat aina pienempiä tai yhtä suuria kuin nolla, joten kuvaaja F ja ratkaisu V kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III, C: V, D: IV, E: I ja F: V

321. a) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x &< -9 \\x^2 - 6x + 9 &< 0\end{aligned}$$

Määritetään merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = x^2 - 6x + 9$  nollakohdat yhtälön  $x^2 - 6x + 9 = 0$  avulla.

Sijoitetaan  $a = 1$ ,  $b = -6$  ja  $c = 9$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Funktion  $f$  ainoa nollakohta on  $x = 3$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

$f(x)$	+		+		$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$
$f(x)$	+		+	3	$f(10) = 10^2 - 6 \cdot 10 + 9 = 49 > 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö  $x^2 - 6x < -9$  ei toteudu millään muuttujan  $x$  arvolla.

Vastaus: ei ratkaisua

b) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$x^2 \geq -4(x + 1)$$
$$x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

Määritetään merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = x^2 + 4x + 4$  nollakohdat yhtälön  $x^2 + 4x + 4 = 0$  avulla.

Sijoitetaan  $a = 1$ ,  $b = 4$  ja  $c = 4$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

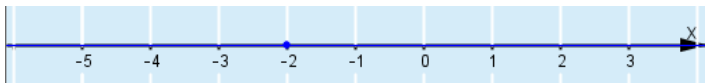
Nollakohta on siis  $x = -2$ .

Lasketaan funktion  $f$  arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

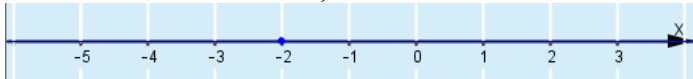
	-2		
$f(x)$	+		+

$$f(-3) = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1 > 0$$
$$f(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö  $x^2 \geq -4(x + 1)$  toteutuu kaikilla  $x$ :n arvolla. Piirretään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus: kaikki reaalityöt,  $x \in \mathbb{R}$



c) Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$8x + 4 < 16x^2 + 5$$

$$-16x^2 + 8x - 1 < 0$$

Lasketaan merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = -16x^2 + 8x - 1$  nollakohdat yhtälön  $-16x^2 + 8x - 1 = 0$  avulla.

Sijoitetaan  $a = -16$ ,  $b = 8$  ja  $c = -1$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

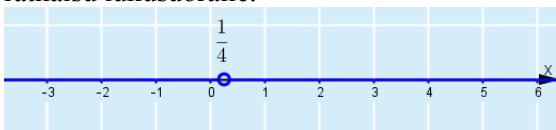
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-16)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{-32} = \frac{-8}{-32} = \frac{1}{4}$$

Nollakohta on siis  $x = \frac{1}{4}$ .

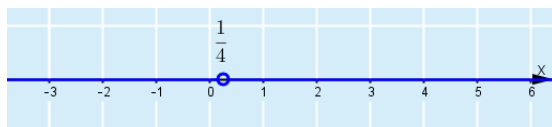
Lasketaan funktion  $f$  arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

$\frac{1}{4}$	$f(0) = -16 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$
$f(x)$ -   -	$f(1) = -16 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 1 = -9 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö  $8x + 4 < 16x^2 + 5$  toteutuu kaikilla muuttujan  $x$  arvoilla paitsi arvolla  $x = \frac{1}{4}$ . Piirretään ratkaisu lukusuoralle.



Vastaus:  $x \neq \frac{1}{4}$



- 322.** Jos koko köysi käytetään kannan  $x$  suuntaisiin sivuihin, on kannan pituus 5 metriä, joten  $x \leq 5$ . Kanan pituus pitää olla myös positiivinen eli  $x > 0$ , joten  $0 \leq x \leq 5$ .

Vastaus:  $0 \leq x \leq 5$

- 323.** Kilohinnan  $x$  pitää olla positiivinen tai 0 eli  $x \geq 0$ . Myös myyntihinnan  $15 - 0,25x$  pitää olla positiivinen tai 0 eli  $15 - 0,25x \geq 0$ .

Ratkaistaan epäyhtälö  $15 - 0,25x \geq 0$ . Merkitään epäyhtälön vasenta puolta funktiona  $f(x) = 15 - 0,25x$ .

Ratkaistaan funktion  $f(x) = 15 - 0,25x$  nollakohta yhtälön  $f(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} 15 - 0,25x &= 0 \\ -0,25x &= -15 \quad ||:(-0,25) \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Laaditaan merkkikaavio.

$f(x)$	+	60	-	$f(0) = 15 - 0,25 \cdot 0 = 15 > 0$
$f(x)$	+		-	$f(100) = 15 - 0,25 \cdot 100 = -10 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön  $15 - 0,25x \geq 0$  ratkaisu on  $x \leq 60$ . Muuttujan  $x$  arvot  $0 \leq x \leq 60$  ovat mahdollisia kilohintoja.

Vastaus:  $0 \leq x \leq 60$

324. Funktion  $g$  nollakohdat ovat  $x = -9$  ja  $x = -4$ , ja funktio vaihtaa merkkinsä molemmissa niistä. Koska tiedetään, että funktion  $g$  kuvaaja leikkaa  $y$ -akselin pisteessä  $(0, 5)$  eli funktio saa positiivisen arvon kohdassa  $x = 0$ . Näin ollen funktion arvot ovat positiivisia, kun  $x > -4$ . Laaditaan funktion merkkikaavio.

	-9	-4	
$f(x)$	+	-	+

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön  $g(x) < 0$  ratkaisu on  $-9 < x < -4$ .

Vastaus:  $-9 < x < -4$

**325.** Sijoitetaan epäyhtälöön  $f(x) > g(x)$  funktioiden  $f(x) = x^2 + x - 6$  ja  $g(x) = 2x^2 - 2x - 4$  lausekkeet.

$$x^2 + x - 6 > 2x^2 - 2x - 4$$

Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$-x^2 + 3x - 2 > 0$$

Lasketaan merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = -x^2 + 3x - 2$  nollakohdat yhtälön  $-x^2 + 3x - 2 = 0$  avulla.

Sijoitetaan  $a = -1$ ,  $b = 3$  ja  $c = -2$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

Nollakohdat ovat siis  $x = \frac{-3-1}{-2} = 2$  ja  $x = \frac{-3+1}{-2} = 1$ .

Määritetään funktion  $f$  arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan merkkikaavio.

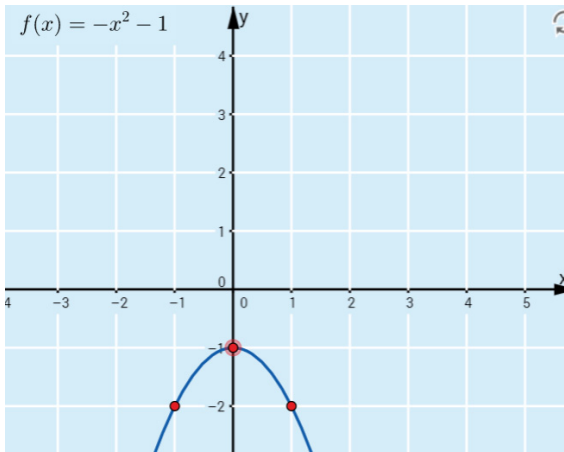
	1	2		$f(0) = -0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$
$f(x)$	-	+	-	$f(1,5) = -1,5^2 + 3 \cdot 1,5 - 2 = 0,25 > 0$
				$f(3) = -3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = -2 < 0$

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälö  $f(x) > g(x)$  toteutuu, kun  $1 < x < 2$ .

Vastaus:  $1 < x < 2$

326. a) Paraabelin määrittämiseksi tarvitaan 3 pistettä. Asetetaan pisteet siten, että jokainen kolmesta paraabelin tunnetusta pisteestä ovat kaikki  $x$ -akselin alapuolella ja keskimmäisen  $y$ -koordinaatti on suurempi kuin kahden reunimmaisena. Lisäksi kaksi reunimmaista ovat  $x$ -koordinaatin suhteen yhtä kaukana keskimmäisestä pisteestä ja reunimmaisten  $y$ -koordinaatit ovat yhtä suuret. Tällöin paraabeli kulkee koko ajan  $x$ -akselin alapuolella, sillä keskimmäinen piste asettuu paraabelin huipuksi ja kaksi muuta määräävät aukeamissuunnan alaspäin.

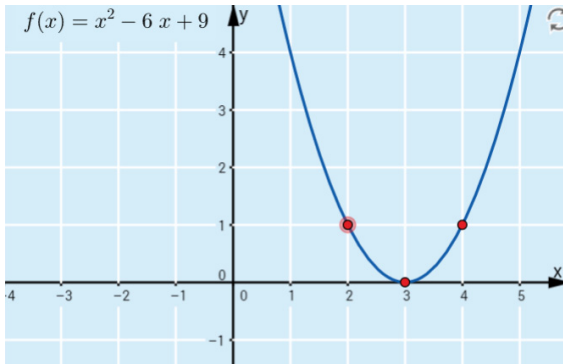
Saadaan esimerkiksi funktio  $f(x) = -x^2 - 1$ .



Vastaus: esim.  $f(x) = -x^2 - 1$

- b) Tehdään kuten a-kohdassa, mutta valitaan keskimmäiseksi pisteeksi  $(3, 0)$  ja kaksi muuta pistettä  $x$ -akselin yläpuolelta,  $x$ -koordinaatin suhteen yhtä kaukana kohdasta  $x = 3$ . Näin saadaan esimerkiksi pisteet  $(2, 1)$  ja  $(4, 1)$ .

Saadaan esimerkiksi funktio  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ .



Vastaus: esim.  $f(x) = x^2 - 6x + 9$

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

327. a) Ratkaistaan epäyhtälö ohjeen avulla.

$$-5x + 20 \leq 0$$

$$-5x \leq -20 \quad ||: (-5) \text{ epäyhtälömerkin suunta vaihtuu,} \\ \text{koska jaetaan negatiivisella luvulla}$$

$$x \geq 4$$

$$\text{Vastaus: } x \geq 4$$

b) Ratkaistaan epäyhtälö ohjeen avulla.

$$\frac{x}{-2} + \frac{x}{-3} \geq 5$$

$$\frac{3x}{-6} + \frac{2x}{-6} \geq 5 \quad || \cdot (-6) \text{ epäyhtälömerkin suunta vaihtuu,} \\ \text{koska kerrotaan negatiivisella luvulla}$$

$$3x + 2x \leq -30$$

$$5x \leq -30 \quad ||: 5$$

$$x \leq -6$$

$$\text{Vastaus: } x \leq -6$$

328. a) Määritetään tulon tekijöiden nollakohdat.

$$x - 1 = 0, \text{ kun } x = 1.$$

$$x - 2 = 0, \text{ kun } x = 2.$$

$$x - 3 = 0, \text{ kun } x = 3.$$

Laaditaan kaikkien tulon tekijöiden kulkukaaviot allekkain, jotta epäyhtälön ratkaisu on helpompi päätellä. Jokainen tekijä on yksinään ensimmäisen asteen polynomifunktio ja erityisesti nouseva suora. Näin ollen jokaisen tekijän merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi nollakohdan kohalla.

	1	2	3
$x -$	-	+	+
$x -$	-	-	+
$x -$	-	-	+

Kulkukaaviosta havaitaan, että tekijöistä on pariton määrä negatiivisia, kun  $x < 1$  tai  $2 < x < 3$ , joten epäyhtälön  $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$  ratkaisu on  $x < 1$  tai  $2 < x < 3$ .

Vastaus:  $x < 1$  tai  $2 < x < 3$

b) Määritetään tulon tekijöiden nollakohtat.

$$3x - 2 = 0$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$-x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{-2}$$

Nollakohtat ovat  $x = \frac{-4-6}{-2} = 5$  ja  $x = \frac{-4+6}{-2} = -1$ .

Laaditaan tulon tekijöiden kulkukaaviot allekkain, jotta epäyhtälön ratkaisu on helpompi päätellä.

Ensimmäisen asteen tekijän lauseke on nousevan suoran lauseke, joten se saa negatiivisia arvoja nollakohtansa vasemmalla puolella ja positiivisia oikealla puolella.

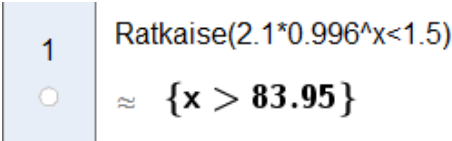
Toisen asteen tekijän lauseketta voidaan kuvata alaspäin aukeavalla paraabelilla, joka saa positiivisia arvoja nollakohtiensa välillä ja negatiivisia muutoin.

	-1	$\frac{2}{3}$	5	
$3x - 2$	-	-	+	+
$-x^2 + 4x + 5$	-	+	+	-
$(3x - 2)(-x^2 + 4x + 5)$	+	-	+	-

Kulkukaaviosta havaitaan, että epäyhtälön  $(3x - 2)(-x^2 + 4x + 5) \geq 0$  ratkaisu on  $x \leq -1$  tai  $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$ .

Vastaus:  $x \leq -1$  tai  $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$

329. Ratkaistaan epäyhtälö  $2,1 \cdot 0,996x < 1,5$  sopivan ohjelman avulla.



1 Ratkaise(2.1\*0.996^x<1.5)  
≈ {x > 83.95}

Ratkaisuksi saadaan  $x > 83,95$ , joten akun varaus alittaa 1,5 ampeerituntia noin 84 tunnin kuluttua lataamisen lopettamisesta.

Vastaus:  $2,1 \cdot 0,996x$ ; 84 h

330. a) Taulukoidaan annetut havaintoarvot ja muodostetaan taulukoiden avulla eksponentiaaliset mallit sopivalla ohjelmalla.

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1450
1	1720

Malliksi saadaan  $y = 1450 \cdot 1,186x$ .

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1590
1	1720

Malliksi saadaan  $y = 1590 \cdot 1,082x$ .

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1450
1	1840

Malliksi saadaan  $y = 1450 \cdot 1,269x$ .

Vuosia vuodesta 2015	Karhuja
0	1590
1	1840

Malliksi saadaan  $y = 1590 \cdot 1,157x$ .

Vastaus:  $y = 1450 \cdot 1,186x$ ,  $y = 1590 \cdot 1,082x$ ,  $y = 1450 \cdot 1,269x$  ja  
 $y = 1590 \cdot 1,157x$

- b) Muodostetaan epäyhtälöt ja ratkaistaan niiden avulla sopivalla ohjelmalla milloin Suomessa on yli 4000 karhua.

$$1450 \cdot 1,186...^x > 4000$$
$$x > 5,942...$$

Joten ensimmäisen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna  $2015 + 5,942... \approx 2021$ .

$$1590 \cdot 1,0817...^x > 4000$$
$$x > 11,738...$$

Joten toisen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna  $2015 + 11,738... \approx 2027$ .

$$1450 \cdot 1,2689...^x > 4000$$
$$x > 4,259...$$

Joten kolmannen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna  $2015 + 4,259... \approx 2019$ .

$$1590 \cdot 1,1572...^x > 4000$$
$$x > 6,317...$$

Joten neljännen mallin mukaan karhuja on yli 4000 noin vuonna  $2015 + 6,317... \approx 2021$ .

Vastaus: n. vuonna 2021, 2027, 2019 ja 2021

**331.** Ratkaistaan kaksoisepäytälö sopivalla ohjelmalla.

1	Ratkaise[ $40 < 70 \cdot \exp(-0.05 \cdot t) + 22 < 50, t$ ]
<input type="radio"/>	$\approx \{18.33 < t < 27.16\}$

Pyöristetään ratkaisu minuutin tarkkuuteen  $18 < t < 27$ . Ratkaisu tarkoittaa, että aikavälillä  $18 \text{ min} < t < 27 \text{ min}$  teen lämpötila on 40 asteen ja 50 asteen välillä

Vastaus:  $18 < t < 27$ , aikavälillä  $18 \text{ min} < t < 27 \text{ min}$  teen lämpötila on 40 celsiusasteen ja 50 celsiusasteen välillä

**332.** Merkitään lukua kirjaimella  $x$ .

Luvun  $x$  kuutio on  $x^3$ .

Luvun  $x$  neliö on  $x^2$ .

Muodostetaan epäytälö ja ratkaistaan se sopivalla ohjelmalla.  
 $x^3 < x^2$

Ratkaise( $x^3 < x^2$ )

→  $\{x < 0, 0 < x < 1\}$

Näin ollen positiiviset reaaliluvut  $x$ , joiden kuutio on pienempi kuin neliö, ovat välillä  $0 < x < 1$ .

Vastaus:  $0 < x < 1$

333. Muokataan epäyhtälö muotoon, jossa toisella puolella on 0.

$$\begin{aligned}x &> ax + 1 \\x - ax - 1 &> 0\end{aligned}$$

Määritetään sopivalla ohjelmalla merkkikaaviota varten funktion  $f(x) = x - ax - 1$  nollakohdat yhtälön  $x - ax - 1 = 0$  avulla.

Ratkaise( $x - a \cdot x - 1 = 0$ )

$$\rightarrow \left\{ x = -\frac{1}{a-1} \right\}$$

Koska epäyhtälön ratkaisun tulee olla  $x > 2$ , on funktion  $f(x)$  nollakohdan oltava  $x = 2$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se sopivalla ohjelmalla.

$$-\frac{1}{a-1} = 2$$

Ratkaise( $-1/(a-1)=2$ , a)

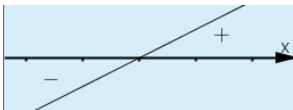
$$\rightarrow \left\{ a = \frac{1}{2} \right\}$$

Lisäksi on tarkistettava, että  $a$ :n arvolla  $\frac{1}{2}$  epäyhtälön ratkaisu on  $x > 2$ .

Sijoitetaan  $a$ :n arvo epäyhtälöön ja tarkistetaan epäyhtälön suunta.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}x - 1 &> 0 \\ \frac{1}{2}x - 1 &> 0\end{aligned}$$

Epäyhtälön vasemmalla puolella olevan funktion kuvaaja on nouseva suora, joten funktio saa positiivisia arvoja nollakohtansa  $x = 2$  oikealla puolella.



Näin ollen epäyhtälön ratkaisu on  $x > 2$   $a$ :n arvolla  $\frac{1}{2}$ .

Vastaus:  $a = \frac{1}{2}$

## 3.2 Funktion kasvavuus ja vähenevyys

### ALOITA PERUSTEISTA

**334.** Epäyhtälöstä A nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 pienempi arvo, mutta erityisesti ei luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä II, joten epäyhtälö A ja hakasulkumerkintä II kuuluvat yhteen.

Epäyhtälöstä B nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 pienempi arvo ja erityisesti myös luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä IV, joten epäyhtälö B ja hakasulkumerkintä IV kuuluvat yhteen.

Epäyhtälöstä C nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 suurempi arvo, mutta erityisesti ei luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä I, joten epäyhtälö C ja hakasulkumerkintä I kuuluvat yhteen.

Epäyhtälöstä D nähdään, että muuttujan arvo saa olla mikä tahansa lukua 4 suurempi arvo ja erityisesti myös luku 4. Tällaista lukuväliä vastaa hakasulkumerkintä III, joten epäyhtälö D ja hakasulkumerkintä III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

**335.** Kulkukaaviosta nähdään, että funktio  $f$  on kasvava, kun  $x \leq 9$  eli välillä  $]-\infty, 9]$ .

Vastaus:  $x \leq 9$ ,  $]-\infty, 9]$

**336.** Kuvaajasta nähdään, että funktion kuvaajan huippu on kohdassa  $x = 3$ , joten funktio  $f$  on kasvava, kun  $x \leq 3$  ja vähenevä, kun  $x \geq 3$  eli kasvava välillä  $]-\infty, 3]$  ja vähenevä välillä  $[3, \infty[$ .

Vastaus: kasvava, kun  $x \leq 3$  eli  $]-\infty, 3]$  ja vähenevä, kun  $x \geq 3$  eli  $[3, \infty[$

337. a) Kuvaajasta nähdään, että funktio on kasvava välillä  $[-4, 2]$ . Näin ollen väite on tosi.

Vastaus: tosi

- b) Kuvaajasta nähdään, että funktio on kasvava välillä  $[-3, 1]$ , joten väite on epätosi. Funktio kuvaajan mukaan näyttäisi olevan vähenevä, kun  $x \leq -4$  tai  $x \geq 2$ .

Vastaus: epätosi,  $x \leq -4$  tai  $x \geq 2$

- c) Kuvaajan mukaan funktion derivaatan arvo kohdissa  $x = -4$  ja  $x = 2$  ei ole negatiivinen vaan nolla. Väite on epätosi.

Vastaus: epätosi, nolla

- d) Funktio on kuvaajan mukaan vähenevä, kun  $x \geq 2$ , joten  $f(2) > f(2,5)$  eli väite on tosi.

Vastaus: tosi

338. a) Täydennetään kulkukaavioon funktion kasvamista ja vähenemistä kuvaavat nuolet derivaatan merkkien avulla.

	3	8	
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

- b) Täydennetään kulkukaavioon derivaatan merkit funktion kulkua kuvaavien nuolien avulla.

	-1	4	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

339. a) Laaditaan annettujen tietojen avulla derivaatan merkkikaavio.

$$\begin{aligned} f'(-10) &= 4 > 0 \\ f'(-2) &= -1 < 0 \\ f'(3) &= 5 > 0 \end{aligned}$$

	-6	2	
$f'(x)$	+	-	+

Vastaus: 

	-6	2	
$f'(x)$	+	-	+

- b) Laaditaan a-kohdan avulla funktion kulkukaavio.

	-6	2	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

- c) Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on vähenevä, kun  $-6 \leq x \leq 2$ .

Vastaus:  $-6 \leq x \leq 2$

340. Derivaatan merkkikaaviosta A nähdään, että funktio on kasvava välillä  $[-1, 2]$  ja muualla vähenevä, joten A ja III kuuluvat yhteen.

Derivaatan merkkikaaviosta B nähdään, että funktio on vähenevä välillä  $[-1, 2]$  ja muualla kasvava, joten B ja I kuuluvat yhteen.

Derivaatan merkkikaaviosta C nähdään, että funktio on kasvava, kun  $x \leq 2$  ja muualla vähenevä, joten C ja IV kuuluvat yhteen.

Derivaatan merkkikaaviosta D nähdään, että funktio on vähenevä, kun  $x \leq 2$  ja muualla kasvava, joten D ja II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: III, B: I, C: IV ja D: II

**341. a)** Muodostetaan funktion  $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$  derivaatta.

$$f'(x) = 4x - 8$$

Derivaatan nollakohdat

$$4x - 8 = 0$$

$$4x = 8 \quad ||: 4$$

$$x = 2$$

Derivaatan merkkikaavio

$f'(x)$	-	2	+
$f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$			$f'(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 > 0$

Vastaus:

$f'(x)$	-	2	+
---------	---	---	---

**b)** Laaditaan a-kohdan avulla funktion  $f$  kulkukaavio.

$f'(x)$	-	2	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

342. Derivoidaan funktio  $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ .

$$f'(x) = -2x + 8$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$-2x + 8 = 0$$

$$-2x = -8 \quad ||:(-2)$$

$$x = 4$$

Laaditaan kulkukaavio.

		4	
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗		↘

$f'(0) = -2 \cdot 0 + 8 = 8 > 0$   
 $f'(5) = -2 \cdot 5 + 8 = -2 < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun  $x \leq 4$  eli välillä  $]-\infty, 4]$ .

Vastaus:  $x \leq 4, ]-\infty, 4]$

343. Derivoidaan funktio  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

$$f'(x) = 2x - 4$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4 \quad || :2$$

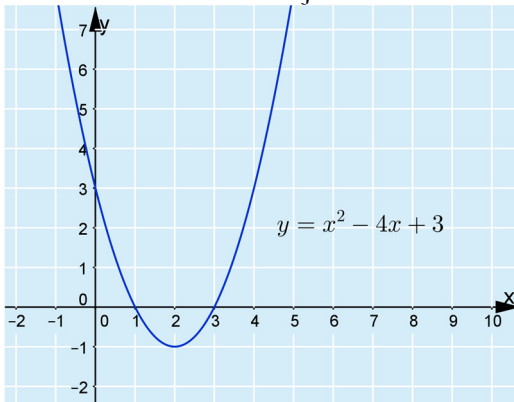
$$x = 2$$

Lasketaan derivaatan  $f'$  arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio.

	2		
$f'(x)$	-	+	$f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$
$f(x)$	↘	↗	$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun  $x \geq 2$  ja vähenevä, kun  $x \leq 2$ .

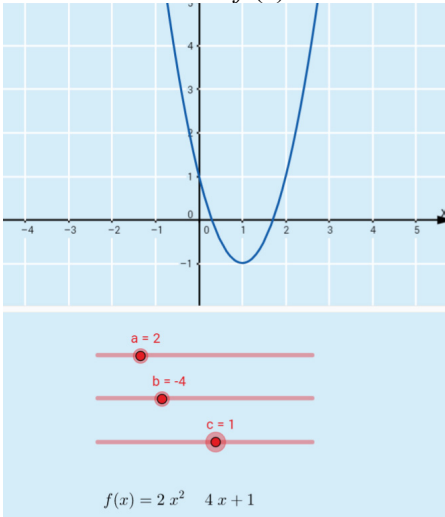
Piirretään funktion kuvaaja



Myös piirtämällä kuvaaja sopivalla ohjelmalla nähdään, että funktio on kasvava, kun  $x \geq 2$  ja vähenevä, kun  $x \leq 2$ .

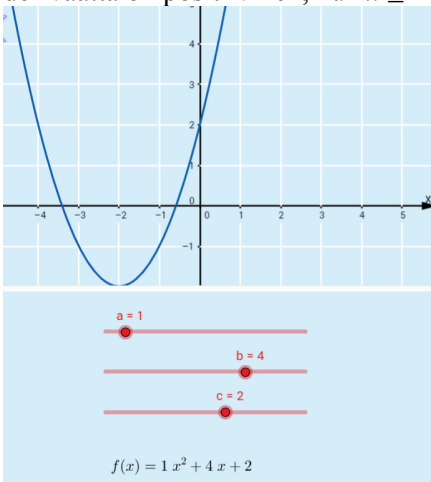
Vastaus: kasvava, kun  $x \geq 2$ , ja vähenevä, kun  $x \leq 2$

344. a) Muuttamalla liikusäätimillä kertoimien  $a$ ,  $b$  ja  $c$  arvoja löydetään esimerkiksi funktio  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ , joka on vähenevä, kun  $x \leq 1$ .



Vastaus: esim.  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

- b) Muuttamalla liikusäätimillä kertoimien  $a$ ,  $b$  ja  $c$  arvoja löydetään esimerkiksi funktio  $f(x) = x^2 + 4x + 2$ , joka on kasvava ja jonka derivaatta on positiivinen, kun  $x \geq -2$ .



Vastaus: esim.  $f(x) = x^2 + 4x + 2$

## VAHVISTA OSAAMISTA

**345.** Epäyhtälömerkintä A tarkoittaa viittä pienempiä lukuja kuten hakasulkumerkintä V, joten A ja V kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä B tarkoittaa viittä ja sitä pienempiä lukuja kuten hakasulkumerkintä VI, joten B ja VI kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä C tarkoittaa viittä suurempia lukuja kuten hakasulkumerkintä VII, joten C ja VII kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä D tarkoittaa viittä ja sitä suurempia lukuja kuten hakasulkumerkintä VIII, joten D ja VIII kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä E tarkoittaa kolmea suurempia, mutta viittä pienempiä lukuja kuten hakasulkumerkintä I, joten E ja I kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä F tarkoittaa lukuja, jotka ovat kolme tai sitä suurempia, mutta pienempiä tai yhtä suuria kuin 5, kuten hakasulkumerkintä II, joten F ja II kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä G tarkoittaa lukuja, jotka ovat kolmea suurempia, mutta pienempiä tai yhtä suuria kuin 5, kuten hakasulkumerkintä IV, joten G ja IV kuuluvat yhteen.

Epäyhtälömerkintä H tarkoittaa lukuja, jotka ovat kolme tai sitä suurempia, mutta pienempiä kuin 5, kuten hakasulkumerkintä III, joten H ja III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: V, B: VI, C: VII, D: VIII, E: I, F: II, G: IV ja H: III

**346.** Derivaatan ominaisuus A tarkoittaa, että funktio on kasvava välillä  $0 \leq x \leq 4$  ja vähenevä väleillä  $x \leq 0$  ja  $x \geq 4$ , joten A ja IV kuuluvat yhteen.

Derivaatan ominaisuus B tarkoittaa, että funktio on vähenevä kaikkialla, joten B ja I kuuluvat yhteen. Derivaatan ominaisuus B tarkoittaa myös, että funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen kohtaan  $x = 2$  piirrettyä tangenttia lukuun ottamatta, joten B ja III kuuluvat yhteen.

Derivaatan ominaisuus C tarkoittaa, että funktio on kasvava välillä  $x \leq 3$  ja vähenevä välillä  $x \geq 3$ , joten C ja II kuuluvat yhteen. Derivaatan ominaisuus C tarkoittaa myös, että funktion muutosnopeus kohdassa  $x = 3$  on nolla, joten C ja V kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, III ja C: II, V

347. a) Derivoidaan funktio  $f(x) = -10x^2 + 7x - 3$ .

$$f'(x) = -20x + 7$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -20x + 7 &= 0 \\ -20x &= -7 \quad ||: (-20) \\ x &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatan  $f'$  arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio.

		$\frac{7}{20}$	
		-----	
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	↗		↘

$f'(0) = -20 \cdot 0 + 7 = 7 > 0$   
 $f'(1) = -20 \cdot 1 + 7 = -13 < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun  $x \leq \frac{7}{20}$  ja vähenevä, kun  $x \geq \frac{7}{20}$ .

Vastaus: kasvava, kun  $x \leq \frac{7}{20}$ , vähenevä, kun  $x \geq \frac{7}{20}$

b) Derivoidaan funktio  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 6$ .

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$$

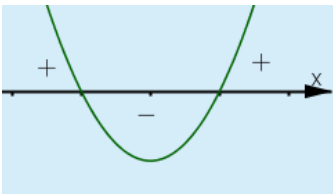
Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -6x^2 + 6x + 12 &= 0 & \parallel :6 \\ -x^2 + x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöstä poimitut kertoimet  $a = -1$ ,  $b = 1$  ja  $c = 2$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-1 \pm 3}{-2} \\ x &= \frac{-1+3}{-2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-1-3}{-2} = 2 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdat ovat  $x = -1$  ja  $x = 2$ . Koska derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, saa derivaatta positiivisia arvoja derivaatan nollakohtien välissä ja negatiivisia muulloin.



Laaditaan merkkikaavio.

	-1	2	
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	↘	↗	↘

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun  $-1 \leq x \leq 2$  ja vähenevä, kun  $x \leq -1$  tai  $x \geq 2$ .

Vastaus: kasvava, kun  $-1 \leq x \leq 2$ , vähenevä, kun  $x \leq -1$  tai  $x \geq 2$

348. a) Derivoidaan funktio  $f(x) = 5x^2 + 15x$ .

$$f'(x) = 10x + 15$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$10x + 15 = 0$$

$$10x = -15 \quad ||:10$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Laaditaan kulkukaavio.

$-\frac{3}{2}$			
$f'(x)$	-	+	$f(-2) = -5 < 0$
$f(x)$	↘	↗	$f(0) = 15 > 0$

Kulkukaaviosta nähdään funktion olevan kasvava, kun  $x \geq -\frac{3}{2}$ .

Vastaus:  $x \geq -\frac{3}{2}$

b) Derivoidaan funktio  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 22$ .  
 $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$

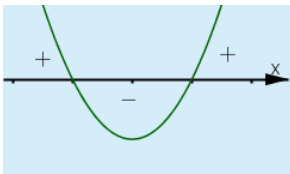
Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$3x^2 - 3x - 18 = 0 \quad ||:3$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

Sijoitetaan toisen asteen yhtälöstä poimitut kertoimet  $a = 1$ ,  $b = -1$  ja  $c = -6$  toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ tai } x = \frac{1-5}{2} = -2$$

Derivaatan nollakohdat ovat  $x = -2$  tai  $x = 3$ . Koska derivaattafunktio on ylöspäin aukeava paraabeli, saa derivaatta negatiivisia arvoja derivaatan nollakohtien välissä ja positiivisia muulloin.



Laaditaan merkkikaavio.

	-2	3	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Kulkukaaviosta nähdään funktion olevan kasvava, kun  $x \leq -2$  tai  $x \geq 3$ .

Vastaus:  $x \leq -2$  tai  $x \geq 3$

349. a) Derivoidaan funktio  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 7$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 9$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$3x^2 - 10x + 9 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö sopivan ohjelman avulla.

Havaitaan, ettei yhtälöllä ole ratkaisuja eli derivaatalla ei ole nollakohtia.

Lasketaan derivaatan  $f'$  arvo jollakin muuttujan  $x$  arvolla.

$$f'(0) = 9 > 0$$

Laaditaan kulkukaavio.

$$\begin{array}{r} \hline f'(x) \quad + \\ \hline f(x) \quad \nearrow \\ \hline \end{array}$$

Vastaus:

$$\begin{array}{r} \hline f'(x) \quad + \\ \hline f(x) \quad \nearrow \\ \hline \end{array}$$

b) Derivoidaan funktio  $f(x) = 2x^3 - \frac{27}{2}x^2 - 15x + 1$ .

$$f'(x) = 6x^2 - 27x - 15$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$6x^2 - 27x - 15 = 0$$

Ratkaistaan yhtälö sopivan ohjelman avulla.

$$x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = 5$$

Huomataan, että derivaatan nollakohta  $x = 5$  ei kuulu tarkasteluvälille  $[-2, 0]$ .

Laaditaan kulkukaavio.

Lasketaan ohjelman avulla derivaatan  $f'$  arvot nollakohdan ja tarkasteltavan välin päätepisteiden rajaamissa lukusuoran väleissä.

$$f'(-1) = 18 > 0$$

$$f'(-0,25) = -7,875 < 0$$

	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	↗	↘	

Vastaus:

	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$	↗	↘	

- 350.** a) Derivaatan kuvaajasta huomataan, että derivaatan arvot ovat suurempia nolla, kun  $x < 1$  tai  $x > 4$  ja nolla kun  $x = 1$  tai  $x = 4$ , joten funktio on kasvava, kun  $x \leq 1$  tai  $x \geq 4$ . Huomataan, että derivaatan arvot pienempiä kuin nolla, kun  $1 < x < 4$  ja nolla kun  $x = 1$  tai  $x = 4$ , joten funktio on vähenevä, kun  $1 \leq x \leq 4$ .

Vastaus: kasvava, kun  $x \leq 1$  tai  $x \geq 4$ , ja vähenevä, kun  $1 \leq x \leq 4$

- b) Derivaatan kuvaajasta huomataan, että derivaatan arvot ovat suurempia nolla, kun  $x > 3$  ja tasan 0, kun  $x = 3$ , joten funktio on kasvava, kun  $x \geq 3$ . Huomataan, että derivaatan arvot pienempiä kuin nolla, kun  $x < 3$  ja tasan 0, kun  $x = 3$ , joten funktio on vähenevä, kun  $x \leq 3$ .

Vastaus: kasvava, kun  $x \geq 3$ , vähenevä, kun  $x \leq 3$

351. a) Derivoidaan ja lasketaan derivaatan arvo kohdassa  $x = 3$  sopivalla ohjelmalla.

$$f(x) := -0.45417x^6 + 16.738x^5 - 250.15x^4 + 1933.8x^3 - 8128.9x^2 + 17578.9x - 15249$$
$$\rightarrow f(x) := -\frac{45417}{100000}x^6 + \frac{8369}{500}x^5 - \frac{5003}{20}x^4 + \frac{9669}{5}x^3 - \frac{81289}{10}x^2 + \frac{175789}{10}x - 15249$$

---

$$f'(4)$$
$$\rightarrow -\frac{213003}{6250}$$

---

$$\approx -34.08$$

$$f'(4) \approx -34$$

Koska derivaatta ilmaisee funktion muutosnopeutta, tulos tarkoittaa käytännössä, että huhtikuun alussa mehiläisten määrä vähenee nopeudella 34 000 mehiläistä/kuukausi.

Vastaus:  $f'(4) = -34$ , huhtikuun alussa mehiläisten määrä vähenee nopeudella 34 000 mehiläistä/kk

- b) Määritetään ohjelman avulla derivaatan  $f'$  nollakohdat ja arvot nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio.

RatkaiseNumeerisesti( $f'(x)=0$ )

≈ { $x = 3.32, x = 4.42, x = 6.43, x = 8.01, x = 8.53$ }

$f(3.1)$

≈ **71.1**

$f(4)$

≈ **-34.08**

$f(5)$

≈ **40.46**

$f(7)$

≈ **-22.62**

$f(8.2)$

≈ **5.61**

$f(8.6)$

≈ **-5.44**

Pyöristetään derivaatan nollakohdat yhden desimaalin tarkkuuteen.

	3	3,3	4,4	6,4	8,0	8,5	9
$f'(x)$	+	-	+	-	+	-	
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↗	↘	

Kulkukaaviosta havaitaan, että funktio on kasvava, kun  $3 \leq x \leq 3,3$  tai  $4,4 \leq x \leq 6,4$  tai  $8,0 \leq x \leq 8,5$  ja vähenevä, kun  $3,3 \leq x \leq 4,4$  tai  $6,4 \leq x \leq 8,0$  tai  $x \geq 8,5$ . Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että mehiläisten määrä kasvaa ja vähenee funktion kulkukaavion mukaisesti

Vastaus: kasvava, kun  $3 \leq x \leq 3,3$  tai  $4,4 \leq x \leq 6,4$  tai  $8,0 \leq x \leq 8,5$ , vähenevä, kun  $3,3 \leq x \leq 4,4$  tai  $6,4 \leq x \leq 8,0$  tai  $x \geq 8,5$ , mehiläisten määrä kasvaa ja vähenee funktion mukaisesti

352. Määritetään funktion  $f(t) = -5t^2 + 4t + 10$  nollakohdat sopivalla ohjelmalla. Nollakohdat ovat  $t = -1,069\dots \approx -1,1$  ja  $t = 1,869\dots \approx 1,9$ . Jälkimmäinen nollakohta tarkoittaa, että hyppääjä putoaa veteen noin 1,9 sekunnin kuluttua ponnistuksesta.

Derivoidaan funktio  $f$ .

$$f'(t) = -10t + 4$$

Määritellään derivaatan nollakohdat yhtälön  $f'(x) = 0$  avulla.

$$\begin{aligned} -10t + 4 &= 0 \\ -10t &= -4 \quad ||:(-8) \\ t &= 0,4 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohta on  $t = 0,4$ .

Lasketaan derivaatan  $f'$  arvot nollakohdan rajaamissa lukusuoran väleissä ja laaditaan kulkukaavio.

		0,4	
$f'(t)$	+	-	$f'(0,1) = -10 \cdot 0,1 + 4 = 3 > 0$
$f(t)$	↗	↘	$f'(1) = -10 \cdot 1 + 4 = -6 < 0$

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun  $t \leq 0,4$  ja vähenevä, kun  $t \geq 0,4$ . Ennen veteen osumistaan uimahyppääjä nousee ylöspäin 0,4 s ja putoaa alaspäin 1,9 s – 0,4 s = 1,5 s.

Vastaus: ylöspäin 0,4 s, alaspäin 1,5 s



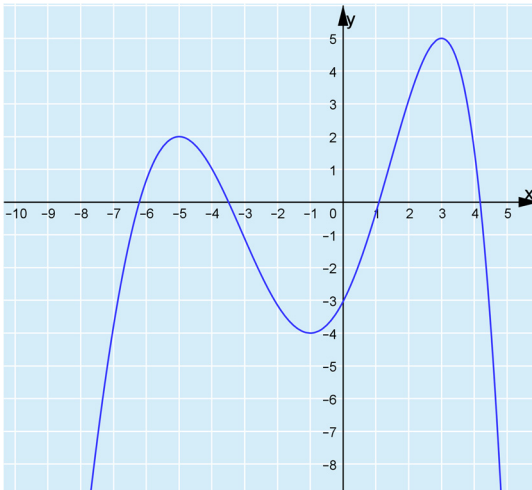
- 354.** Havaitaan, että, kun funktio  $g$  vähenee, funktio  $f$  saa negatiivisia arvoja. Kun funktio  $g$  kasvaa, funktio  $f$  saa positiivisia arvoja. Näin ollen funktio  $f$  on funktion  $g$  derivaattafunktio.

Vastaus: funktio  $f$  on funktion  $g$  derivaattafunktio

- 355.** Tietojen  $f(-5) = 2$ ,  $f(-1) = -4$  ja  $f(3) = 5$  perusteella tiedetään, että funktion kuvaaja kulkee pisteiden  $(-5, 2)$ ,  $(-1, -4)$  ja  $(3, 5)$  kautta.

Kulkukaavion avulla nähdään milloin funktio kasvaa ja milloin vähenee.

Funktion kuvaaja voi olla esimerkiksi seuraava.



356. Laaditaan funktion kulkukaavio kuvaajan hahmotelman pohjaksi.

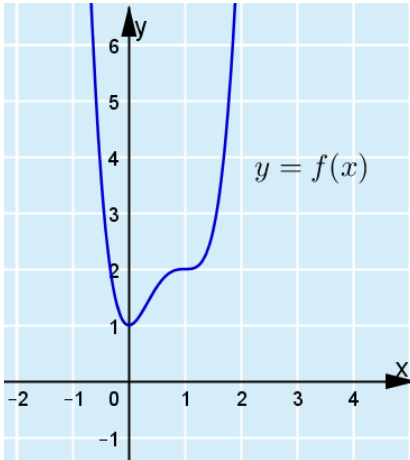
	0	1	
$f'(x)$	-	+	+
$f(x)$	↘	↗	↗

Kuvaaja siis kääntää kulkuaan vain kohdassa  $x = 0$ .

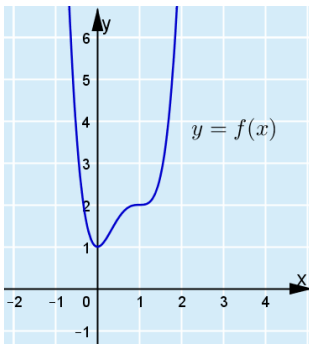
Lisäksi tiedetään, että  $f'(0) = f'(1) = 0$  eli funktiolla on terassikohta kohdassa  $x = 1$ .

Tiedetään, että  $f(0) = 1$  ja  $f(1) = 2$ .

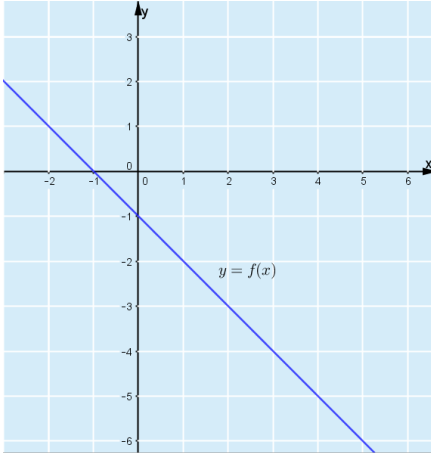
Hahmotellaan kuvaaja tietoihin sopiva kuvaaja.



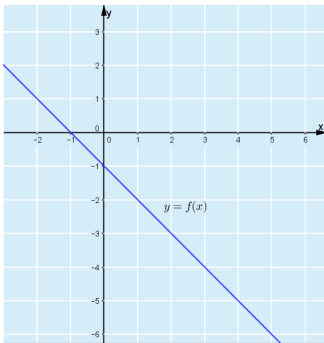
Vastaus: esim.



357. a) Funktion arvon tulee olla negatiivinen välillä  $[0, 5]$  eli kuvaajan tulee kulkea  $x$ -akselin alapuolella tällä välillä. Väheneväksi funktioksi kelpaa esimerkiksi laskeva suora. Funktioksi kelpaa esimerkiksi  $f(x) = -x - 1$ .

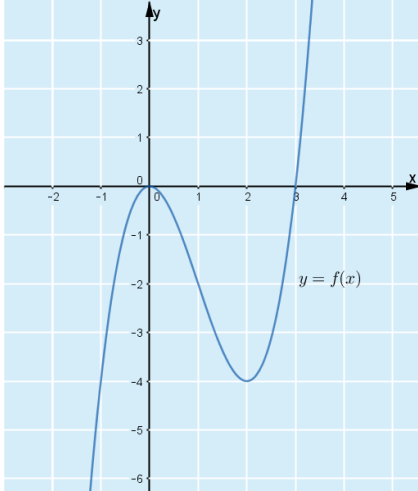


Vastaus: esim.



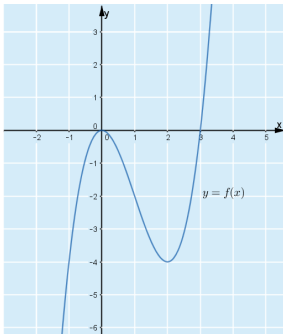
- b) Funktion tulee kääntyä kasvavasta väheneväksi ja vähenevästä kasvavaksi eli funktion tulee muuttaa kulkusuuntaansa vähintään kahdesti, koska funktiolla on derivaatan nollakohdat kohdissa  $x = 0$  ja  $x = 2$ .

Hahmotellaan ehtoihin sopiva kuvaaja.



Esimerkiksi funktio  $f(x) = -x^3 - 3x^2$ .

Vastaus: esim.



- c) Väitteen perusteella funktion tulisi olla kasvava välillä  $[1, 9]$  ja funktiolla tulisi päteä ehto  $f(1) > f(9)$ . Ehto on ristiriidassa kasvavuuden kanssa, joten kuvaajan piirtäminen on mahdotonta.

Vastaus: mahdoton

## SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

358. Jos funktio on vähenevä, niin mikä tahansa muuttujan arvoa 0,011 suurempi muuttujan arvo vastaa funktion arvoa  $f(0,011)$  pienempää funktion arvoa.

Tutkitaan funktion vähenevyyttä kulkukaavion avulla.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = -210x^{41}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta yhtälöstä  $f'(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} -210x^{41} &= 0 & \parallel :(-210) \\ x^{41} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohta on  $x = 0$ .

Laaditaan kulkukaavio

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 210 \\ f'(1) &= -210 \end{aligned}$$

0		
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

Kulkukaaviosta havaitaan, että funktio on vähenevä, kun  $x \geq 0$ , joten nolaa suuremmilla muuttujan arvoilla pätee ”mitä suurempi muuttujan arvo, sitä pienempi funktion arvo”. Väite on siis totta, koska funktion on vähenevä välillä  $[0,011; 0,1]$ , jolle molemmat tarkasteltavat muuttujan arvot kuuluvat.

Vastaus: -

**359.** Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla.

$$\text{Derivoidaan funktio } f(x) = 3x^5 + x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 15x^4 + 3x^2 + 4$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä  $f'(x) = 0$  sopivan ohjelman avulla.

$$15x^4 + 3x^2 + 4 = 0$$

Havaitaan, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja eli derivaatalla ei ole nollakohtia.

Lasketaan derivaatan arvo jollakin muuttujan arvolla.

$$f'(0) = 15 \cdot 0^4 + 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 > 0$$

Laaditaan kulkukaavio.

$$\begin{array}{r} \hline f'(x) \quad + \\ \hline f(x) \quad \nearrow \\ \hline \end{array}$$

Kulkukaavion perusteella funktio on kasvava kaikkialla.

Vastaus: -

**360.** a) Jotta funktio olisi konvekksi, on funktion derivaatan oltava kasvava.

Derivoidaan funktio  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

Tutkitaan derivaatan kasvavuutta. Derivoidaan derivaatta eli muodostetaan toinen derivaatta.

$$f''(x) = 6x + 4$$

Toisen derivaatan kuvaaja on nouseva suora, joten se vaihtaa merkkiään nollakohdassa. Tällöin alkuperäinen derivaattafunktio ei ole kasvava kaikkialla, joten funktio  $f$  ei ole konvekksi.

Vastaus:-

b) Jotta funktio olisi konvekksi, on funktion derivaatan oltava kasvava.

Derivoidaan funktio.

$$g'(x) = 4x^3 + 2ax$$

Tutkitaan derivaatan kasvavuutta. Derivoidaan derivaatta eli muodostetaan toinen derivaatta.

$$g''(x) = 12x^2 + 2a$$

Jotta derivaatta olisi kasvava, kaikilla muuttujan arvoilla on oltava voimassa epäyhtälö  $g''(x) \geq 0$ .

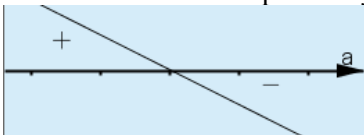
$$12x^2 + 2a \geq 0$$

Koska yhtälön vasen puoli on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälö pätee kaikilla muuttujan arvoilla, jos paraabelilla ei ole nollakohtia tai on tasan yksi nollakohta.

Nollakohtia ei ole tai niitä on tasan yksi, jos nollakohtia ratkaistaessa toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan neliöjuuren alle tulee nolla tai negatiivinen luku. Muodostetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan juuren alainen osa.

$$0^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2a \leq 0 \\ -96a \leq 0$$

Epäyhtälön vasemmalla puolella oleva lauseke on  $a$  muuttujainen ensimmäisen asteen polynomifunktio eli suora, erityisesti laskeva suora. Näin ollen vasemman puolen lauseke saa negatiivisia arvoja nollakohtana oikealla puolella ja positiivisia vasemmalla puolella.



Ratkaistaan lausekkeen nollakohta.

$$-96a = 0 \quad || : (-96) \\ a = 0$$

Näin ollen funktio  $g$  on konvekksi, kun  $a \geq 0$ .

Vastaus:  $a \geq 0$

- 361.** Muodostetaan funktion kulkukaavio ja päätellään ratkaisu kulkukaavion avulla.

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä  $f'(x) = 0$  sopivan ohjelman avulla.

Derivaatan nollakohdat ovat  $x = 2$  tai  $x = 6$ .

Lasketaan kulkukaaviota varten derivaatan arvot derivaatan nollakohtien rajaamissa lukusuoran väleissä.

$$f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 12 = 12 > 0$$

$$f'(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 12 = -3 < 0$$

$$f'(7) = 7^2 - 8 \cdot 7 + 12 = 5 > 0$$

Laaditaan kulkukaavio

	2	6	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Koska funktio on vähenevä välillä  $[2, 6]$  ja  $3 < 4$ , funktion arvoista  $f(3) > f(4)$ .  
 $f(3)$  on suurempi.

Vastaus:  $f(3)$

362.  $f(x) = x^3 + x^2 + 0,05x - 1$  on polynomifunktio.

Jos polynomifunktion arvoista  $f(0)$  ja  $f(1)$  toinen on negatiivinen ja toinen positiivinen, on polynomifunktiolla oltava ainakin yksi nollakohta välillä  $[0, 1]$ . Lasketaan funktion arvot  $f(0)$  ja  $f(1)$ .

$$f(0) = 0^3 + 0^2 + 0,05 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 0,05 \cdot 1 - 1 = 1,05 > 0$$

Siis polynomifunktiolla  $f$  on ainakin yksi nollakohta välillä  $[0, 1]$ .

Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 0,05$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä  $f'(x) = 0$  sopivan ohjelman avulla.

Derivaatan nollakohdat ovat

$$x \approx -0,026 \text{ tai } x \approx -0,641$$

Laaditaan kulkukaavio välillä  $[0, 1]$ . Kumpikaan derivaatan nollakohdista ei ole välillä  $[0, 1]$ , joten lasketaan derivaatan arvo jollakin muuttujan arvolla annetulla välillä funktion kulun tutkimiseksi.

$$f'(0,5) = 3 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 + 0,05 = 1,8 > 0$$

	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$		↗

Kulkukaavion perusteella funktio ei muuta kulkuaan välillä  $[0, 1]$ , joten polynomifunktiolla  $f$  voi leikata  $x$ -akselin korkeintaan kerran eli sillä on korkeintaan yksi nollakohta välillä  $[0, 1]$

Koska polynomifunktiolla  $f$  on ainakin yksi ja korkeintaan yksi nollakohta välillä  $[0, 1]$ , on sillä täsmälleen yksi nollakohta välillä  $[0, 1]$ .

Vastaus: -

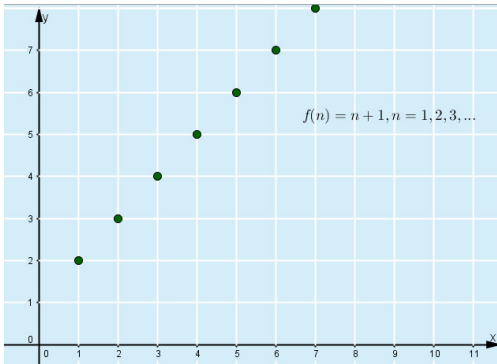
- 363.** Funktio voi olla kasvava, vaikka derivaattaa ei olisi olemassa. Jos derivaattaa ei ole olemassa ei voida myöskään sanoa derivaatan olevan positiivinen.

Esimerkiksi kasvavalle lukujonolle ei voida määrittää derivaattaa yhdelläkään muuttujan arvolla. Muodostetaan funktio aritmeettiselle lukujonolle.

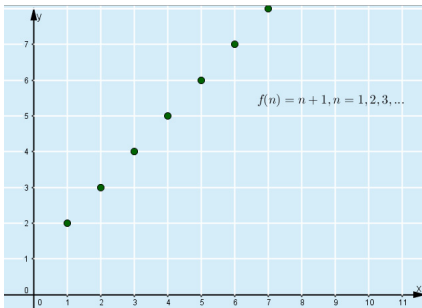
Esimerkiksi

$$f(n) = n + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Piirretään funktion kuvaaja.



Vastaus: esim.



364. a) Toisen asteen polynomifunktion derivaatta on ensimmäisen asteen polynomifunktio eli suora.

Koska paraabeli on alaspäin aukeava, funktio on kasvava huipun vasemmalla puolella ja vähenevä huipun oikealla puolella. Tällöin derivaatta saa positiivisia arvoja huippukohtaan  $x = 2$  vasemmalla puolella ja negatiivisia oikealla puolella. Derivaatta on siis laskeva suora, jonka nollakohta on  $x = 2$ .

Paraabelin yhtälö on  $y = ax^2 + bx + c$ .

Koska huippu on pisteessä  $(2, 2)$  ja funktion nollakohta on  $(4, 0)$ , on symmetrian perusteella toinen nollakohta  $(0, 0)$  eli  $c = 0$ . Sijoitetaan kaksi muuta pistettä paraabelin yhtälöön ja muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari sopivalla ohjelmalla.

1

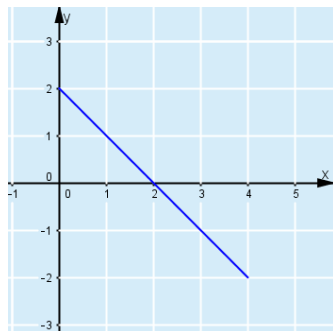
Ratkaise[ $\{4a+2b=2, 16a+4b=0\}, \{a,b\}$ ]

$$\rightarrow \left\{ \left\{ \mathbf{a} = -\frac{1}{2}, \mathbf{b} = 2 \right\} \right\}$$

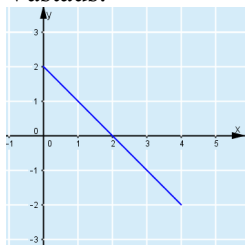
Paraabeli on siis

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x. \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$
$$f'(x) = -x + 2$$

Piirretään derivaatan kuvaaja.



Vastaus:



b) Jos derivaatta on suora, on funktion oltava toisen asteen polynomifunktio eli kuvaaja on paraabeli.

Koska derivaatta on nouseva suora, saa derivaatta nollakohtansa vasemmalla puolella negatiivisia arvoja ja oikealla positiivisia. Näin ollen funktion on oltava derivaatan nollakohdan  $x = -\frac{1}{2}$  vasemmalla puolella vähenevä ja oikealla kasvava. Siis funktio on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka huippu on kohdassa  $x = -\frac{1}{2}$ .

Lisäksi tiedetään, että derivaatta saa arvon 1 kohdassa  $x = 0$ , joten funktiolle asetetun tangentin kulmakerroin kohdassa  $x = 0$  on 1.

Nyt siis tiedetään, että

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(0) = b = 1$$

Ja edelleen tiedetään, että  $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

Ratkaistaan  $a$ .

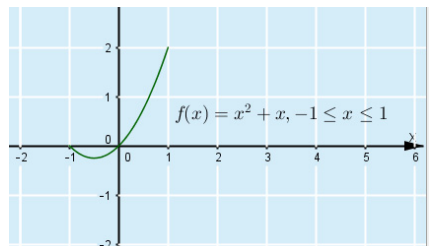
$$-a + 1 = 0$$

$$-a = -1 \quad ||: (-1)$$

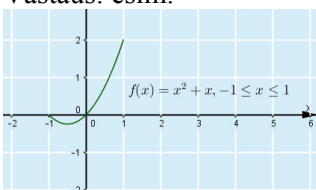
$$a = 1$$

Koska funktiolle ei ole ainoatakaan tunnettua pistettä, funktion vakiotermistä ei voida sanoa mitään. Näin ollen ylöspäin aukeavan paraabelin voi piirtää mille korkeudelle tahansa.

Valitaan esimerkiksi  $c = 0$  ja piirretään funktion  $f(x) = x^2 + x$  kuvaaja välillä  $[-1, 1]$ .



Vastaus: esim.



## ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

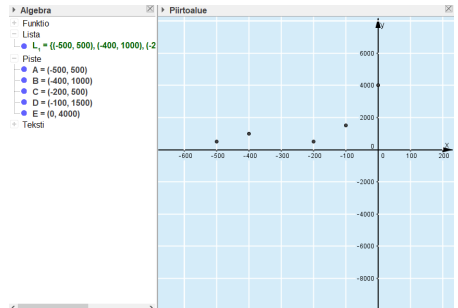
1. Kopioidaan taulukko sopivaan ohjelmaan ja luodaan pisteistä

	A	B	C	D	E	F
1	-500.00	500.00				
2	-400.00	1000.0				
3	-200.00	500.00				
4	-100.00	1500.0				
5	0.0000	4000.0				
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						

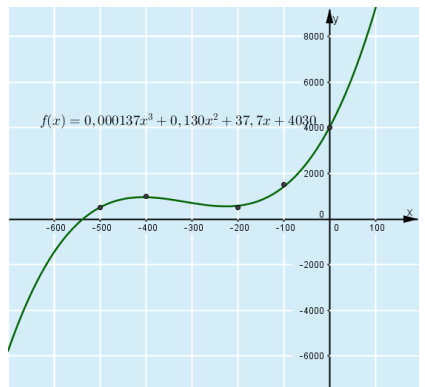
A1:B5

- Kopioi
- Liita
- Leikkaa
- Poista objektit
- Luo
  - Lista
  - Pistelista
  - Matriisi
  - Taulu
  - Murtoviiva
  - Operaatio taulu
- Näytä objekti
- Näytä nimi
- Vie taulukkoon
- Ominaisuudet ...

Saadaan hajontakuviota ja pisteistä muodostunut lista.



Sovitetaan aineistoon kolmannen asteen polynomifunktio.



Saadaan funktio  $f(x) = 0,000137x^3 + 0,130x^2 + 37,7x + 4030$ .

Vastaus:  $f(x) = 0,000137x^3 + 0,130x^2 + 37,7x + 4030$

2. Sovelletaan tehtävän 1 funktiota

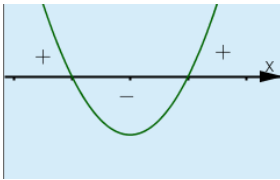
$$f(x) = 0,000137x^3 + 0,130x^2 + 37,7x + 4030.$$

Määritetään derivaatan nollakohdat sopivalla ohjelmalla yhtälöstä  $f'(x) = 0$ .

1	Ratkaise[f'(x)=0]
<input type="radio"/>	$\approx \{x = -405.95126, x = -225.6814\}$

Pyöristetään derivaatan nollakohdat kokonaisluvuiksi kulkukaaviota varten.

Koska derivaattafunktio on ylöspäin aukeava paraabeli, saa derivaattafunktio negatiivisia arvoja nollakohtien välissä ja positiivisia muulloin.



Laaditaan kulkukaavio.

	-406	-226	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Kulkukaavion perusteella lajien määrä väheni 226–406 miljoonaa vuotta sitten ja kasvoi muulloin.

Vastaus: väheni 226–406 miljoonaa vuotta sitten, kasvoi muulloin

	-406	-226	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗