

1 MUUTOSNOPEUS

POHDITTAVAA

1. Pohjasedimenttiä on kertynyt järveen $0,16 \cdot 7,3 \text{ m} = 1,168 \text{ m} = 1168 \text{ mm}$.
Tähän on kulunut aikaa 10 000 vuotta, joten sedimenttiä on kertynyt keskimäärin $\frac{1168 \text{ mm}}{10\,000 \text{ a}} = 0,1168 \frac{\text{mm}}{\text{a}} \approx 0,1 \frac{\text{mm}}{\text{a}}$.

Pohjasedimentin kertymisnopeus on noin 0,1 mm/vuosi.

Vastaus: 0,1 mm/vuosi

2. Järven syvyys on nyt $7,3 \text{ m} - 0,16 \cdot 7,3 \text{ m} = 6,132 \text{ m} = 6132 \text{ mm}$.
Edellisen tehtävän nojalla sedimenttiä kertyy nopeudella $0,1168 \frac{\text{mm}}{\text{a}}$,
joten järven täyttymiseen kuluu aikaa $\frac{6132 \text{ mm}}{0,1168 \frac{\text{mm}}{\text{a}}} = 52\,500 \text{ a} \approx 50\,000 \text{ a}$.

Vastaus: 50 000 vuoden kuluttua

1.1 Keskimääräinen muutosnopeus

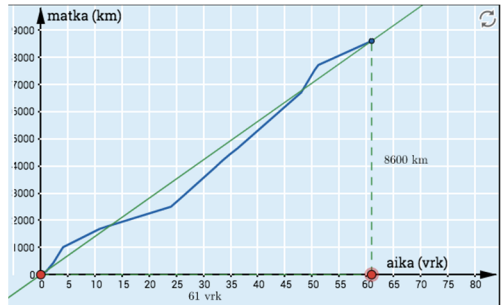
ALOITA PERUSTEISTA

101. Epäyhtälömerkkien merkitys selviää esimerkiksi muistisäännöstä ”suu auki suurempaan” tai ”piikki pistää pienempään”. Jos epäyhtälömerkissä on alaviiva, niin yhtäsuuruus sallitaan.

Vastaus: A: II, B: IV, C: I ja D: III

102. a) Ukon keskinopeus koko matkalla on matkan alku- ja loppupisteisiin piirretyn sekantin kulmakerroin. Appletin avulla nähdään, että kulmakerroin on

$$k = \frac{8600 \text{ km}}{61 \text{ vrk}} \approx 141 \text{ km/vrk.}$$

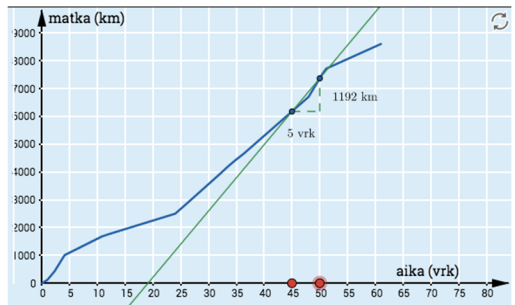


Ukon keskinopeus koko matkalla oli noin 141 km/vrk.

Vastaus: 141 km/vrk

- b) Ukon keskinopeus aikavälillä 45 vrk–50 vrk on aikavälin alku- ja loppupisteisiin piirretyn sekantin kulmakerroin. Appletin avulla nähdään, että kulmakerroin on

$$k = \frac{1192 \text{ km}}{5 \text{ vrk}} \approx 238 \text{ km/vrk.}$$



Ukon keskinopeus aikavälillä 45 vrk - 50 vrk oli noin 238 km/vrk.

Vastaus: 238 km/vrk

103. Merkinnässä $[a, b]$ luku a on lukusuoran välin pienin luku ja luku b sen suurin luku.

- a) Väli $[9, 11]$ merkitään epäyhtälömerkinnällä $9 \leq x \leq 11$. Välin $[9, 11]$ pienin luku on 9 ja suurin luku 11. Niiden välissä on esimerkiksi luku 10.

Vastaus: $9 \leq x \leq 11$, pienin 9, suurin 11, esim. 10

- b) Väli $[-9, -5]$ merkitään epäyhtälömerkinnällä $-9 \leq x \leq -5$. Välin $[-9, -5]$ pienin luku on -9 ja suurin luku -5 . Niiden välissä on esimerkiksi luku -7 .

Vastaus: $-9 \leq x \leq -5$, pienin -9 , suurin -5 , esim. -7

- c) Väli $[0, 1]$ merkitään epäyhtälömerkinnällä $0 \leq x \leq 1$. Välin $[0, 1]$ pienin luku on 0 ja suurin luku 1. Niiden välissä on esimerkiksi luku $\frac{1}{2}$.

Vastaus: $0 \leq x \leq 1$, pienin 0, suurin 1, esim. $\frac{1}{2}$

- 104.** a) Muuttujan arvot välin $1 \leq x \leq 2$ päätepisteissä ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$.
Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat kuvaajan
perusteella $y_1 = 2$ ja $y_2 = 6$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $1 \leq x \leq 2$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 2}{2 - 1} = \frac{4}{1} = 4.$$

Vastaus: 4

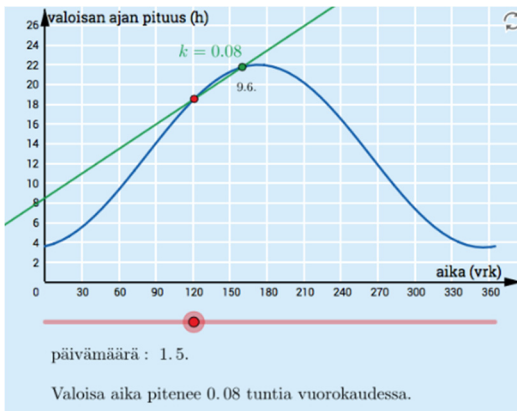
- b) Muuttujan arvot välin $2 \leq x \leq 4$ päätepisteissä ovat $x_1 = 2$ ja $x_2 = 4$.
Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat kuvaajan
perusteella $y_1 = 6$ ja $y_2 = 0$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $2 \leq x \leq 4$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{4 - 2} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Vastaus: -3

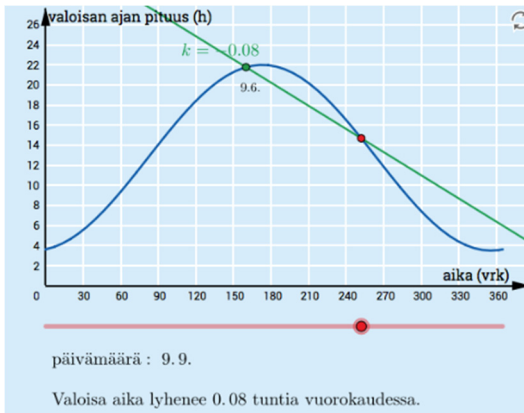
105. a) Siirretään liikusäätimellä mittauksen toiseksi päivämääräksi 1.5.



Havaitaan, että valoisa aika pitenee vuorokautta kohti keskimäärin $0,08 = 0,08 \cdot 60 \text{ min} = 4,8 \text{ min} \approx 5 \text{ min}$.

Vastaus: pitenee 5 min/vrk

b) Siirretään liikusäätimellä mittauksen toiseksi päivämääräksi 9.9.



Havaitaan, että valoisa aika lyhenee vuorokautta kohti keskimäärin $0,08 = 0,08 \cdot 60 \text{ min} = 4,8 \text{ min} \approx 5 \text{ min}$.

Vastaus: lyhenee 5 min/vrk

106. Autolla ajettiin $66\,021\text{ km} - 65\,781\text{ km} = 240\text{ km}$.
Aikaa kului $2\text{ h } 30\text{ min} = 2,5\text{ h}$.
Automatkan keskinopeus oli $\frac{240\text{ km}}{2,5\text{ h}} = 96\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Vastaus: 96 km/h

107. a) Muuttujan arvot välin $[-4, 2]$ päätepisteissä ovat $x_1 = -4$ ja $x_2 = 2$.
Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat
 $y_1 = f(-4) = (-4)^2 = 16$ ja $y_2 = f(2) = 2^2 = 4$.

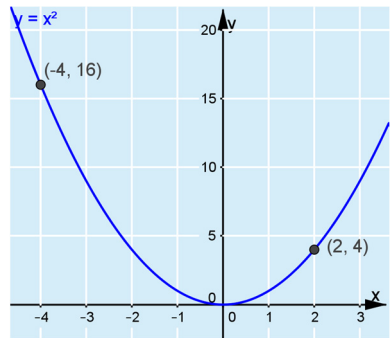
Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-4, 2]$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 16}{2 - (-4)} = \frac{-12}{6} = -2.$$

Vastaus: -2

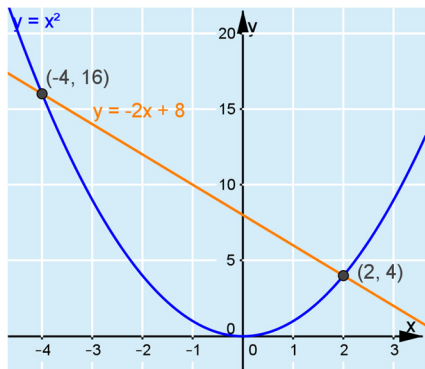
- b) Piirretään funktion f kuvaaja ja merkitään sille pisteet kohtiin, joissa $x = -4$ ja $x = 2$.

Piirretään pisteiden kautta suora.



Ohjelma antaa suoran kulmakertoimeksi $k = -2$, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-4, 2]$ on -2 .

Vastaus: -2



- 108.** Muuttujan x arvot välin $[10, 25]$ päätepisteissä ovat $x_1 = 10$ ja $x_2 = 25$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat sadon y arvot ovat taulukon perusteella $y_1 = 6790$ ja $y_2 = 5830$.

Sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä $[10, 25]$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5830 \text{ kg} - 6790 \text{ kg}}{25 \text{ kg} - 10 \text{ kg}} = -64.$$

Kun lannoituksen määrä nostetaan 10 kilogrammasta 25 kilogrammaan, sato pienenee jokaista lisättyä typpilannoitekilogrammaa kohti 64 kg.

Vastaus: pieneni 64 kg

VAHVISTA OSAAMISTA

109. a) Väli $[-1, 3[$ merkitään epäyhtälömerkinnällä $-1 \leq x < 3$. Välin $[-1, 3[$ pienin luku on -1 ja suurinta lukua ei ole. Välillä $[-1, 3[$ on esimerkiksi luku 0.

Vastaus: $-1 \leq x < 3$, pienin -1 , suurinta lukua ei ole, esim. 0

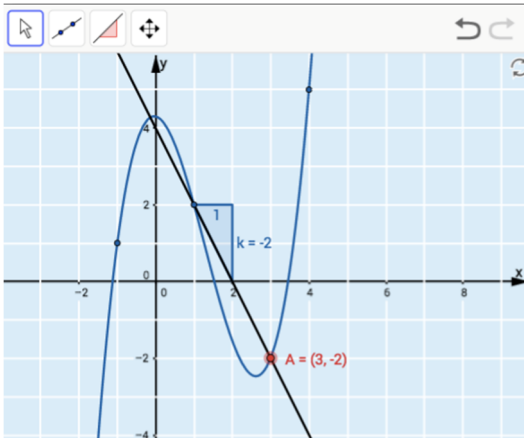
- b) Väli $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$ merkitään epäyhtälömerkinnällä $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$. Välin $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$ pienintä lukua ei ole. Välin $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$ suurin luku on $\frac{1}{2}$. Välillä $\left] \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$ on esimerkiksi lukujen $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{2}$ puolessa välissä oleva luku $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}$.

Vastaus: $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$, pienintä lukua ei ole, suurin $\frac{1}{2}$, esim. $\frac{5}{12}$

- c) Väli $] -\pi, -\sqrt{2} [$ merkitään epäyhtälömerkinnällä $-\pi < x < -\sqrt{2}$. Välin $] -\pi, -\sqrt{2} [$ pienintä ja suurinta lukua ei ole. Koska $-\pi \approx -3,141\dots$ ja $-\sqrt{2} \approx -1,414\dots$, välillä $] -\pi, -\sqrt{2} [$ on esimerkiksi luku -2 .

Vastaus: $-\pi < x < -\sqrt{2}$, pienintä ja suurinta lukua ei ole, esim. -2

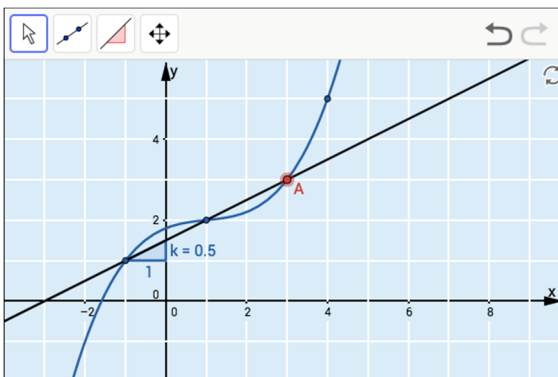
110. a) Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 1$ ja $x = 3$ kautta. Siirretään pistettä A y -akselin suuntaisesti niin, että sekantin kulmakertoimeksi saadaan $k = -2$.



Pisteen A koordinaatit ovat $(3, -2)$.

Vastaus: $(3, -2)$

- b) Toimitaan vastaavasti kuin a-kohdassa. Piirretään nyt sekantti kohtien $x = -1$ ja $x = 3$ kautta.



Pisteen A koordinaatit ovat $(3, 3)$.

Vastaus: $(3, 3)$

- 111.** Funktion f keskimääräinen muutosnopeus saadaan jakamalla funktion arvon muutos muuttujan arvon muutoksella. Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[5, 9]$ on siis $\frac{31-19}{9-5} = \frac{12}{4} = 3$.

Tulos tarkoittaa käytännössä, että henkilön iän muuttuessa viidestä vuodesta yhdeksään vuoteen henkilön massa kasvaa vuodessa keskimäärin 3 kg.

Vastaus: 3. Henkilön massa kasvaa viiden ja yhdeksän ikävuoden välillä keskimäärin 3 kg vuodessa.

- 112. a)** Kuvaajan x -koordinaatin pienin arvo on 0 ja suurin 4, joten kuvassa on funktion kuvaaja välillä $[0, 4]$. Väite on siis epätosi.

Vastaus: epätosi, $[0, 4]$

- b)** Muuttujan x arvot välin $[0, 3]$ päätepisteissä ovat $x_1 = 0$ ja $x_2 = 3$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat funktion arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = -3$ ja $y_2 = 0$. Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 3]$ on $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-3)}{3 - 0} = \frac{3}{3} = 1$.

Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

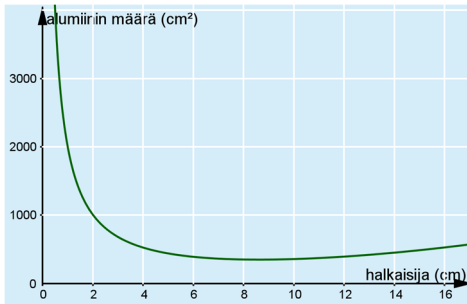
- c)** Kun kuvaajan pisteen x -koordinaatti on lukujen 1 ja 3 välillä, kuvaaja on x -akselin yläpuolella, joten y -koordinaatti on suurempi kuin nolla. Väite on siis tosi.

Vastaus: tosi

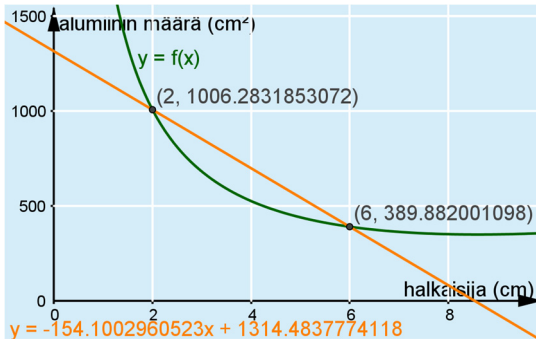
- d)** Tutkitulla välillä funktion arvo eli kuvaajan y -koordinaatti on vähintään -3 ja korkeintaan 1, eli $-3 \leq f(x) \leq 1$. Väite on siis epätosi. Sen sijaan muuttujan arvo eli kuvaajan x -koordinaatti on vähintään 0 ja korkeintaan 4, eli $0 \leq x \leq 4$.

Vastaus: epätosi, x

113. a) Piirretään funktion $f(x) = \frac{2000}{x} + 0,5\pi x^2$ kuvaaja, kun $x > 0$.



- b) Merkitään koordinaatistoon pisteet $(2, f(2))$ ja $(6, f(6))$ ja piirretään suora niiden kautta.



Ohjelma antaa suoran kulmakertoimeksi $k = -154,100... \approx -154,1$.

Vastaus: $k \approx -154,1$

- c) Kohdan b tulos tarkoittaa, että kun tölkin pohjan halkaisija kasvaa 2 cm:stä 6 cm:iin, tarvittavan alumiinin määrä pienenee keskimäärin noin $154,1 \text{ cm}^2$, kun halkaisija kasvaa yhdellä senttimetrillä.

Vastaus: Tarvittavan alumiinin määrä pienenee keskimäärin n. 154 cm^2 , kun halkaisija kasvaa.

- 114. a)** Muuttujan x arvot välin $[1980, 2015]$ päätepisteissä ovat $x_1 = 1980$ ja $x_2 = 2015$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 23$ ja $y_2 = 9470$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1980, 2015]$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9470 - 23}{2015 - 1980} = 269,914... \approx 270 \text{ tuhatta liittymää/vuosi.}$$

Vastaus: 270 000 liittymää/vuosi

- b)** Kuvaaja näyttää silmämääräisesti jyrkimmältä aikaväleillä 1995–2000 ja 2005–2010. Lasketaan funktion f keskimääräiset muutosnopeudet väleillä $[1995, 2000]$ ja $[2005, 2010]$.

Muuttujan x arvot välin $[1995, 2000]$ päätepisteissä ovat $x_1 = 1995$ ja $x_2 = 2000$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 1039$ ja $y_2 = 3729$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1995, 2000]$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3729 - 1039}{2000 - 1995} = 538 \text{ tuhatta liittymää/vuosi.}$$

Muuttujan x arvot välin $[2005, 2010]$ päätepisteissä ovat $x_1 = 2005$ ja $x_2 = 2010$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 5385$ ja $y_2 = 8390$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2005, 2010]$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8390 - 5385}{2010 - 2005} = 601 \text{ tuhatta liittymää/vuosi.}$$

Muutosnopeus oli siis suurin vuodesta 2005 vuoteen 2010. Tuolloin matkapuhelinliittymien määrä kasvoi vuodessa keskimäärin 601 tuhannella.

Vastaus: aikavälillä $[2005, 2010]$, 601 000 liittymää/vuosi

- c) Muutosnopeus oli kuvaajan perusteella pienin vuosina 1980–1985. Lasketaan funktion f muutosnopeus välillä $[1980, 1985]$.

Muuttujan x arvot välin $[1980, 1985]$ päätepisteissä ovat $x_1 = 1980$ ja $x_2 = 1985$. Näitä muuttujan arvoja vastaavat liittymien määrän y arvot ovat kuvaajan perusteella $y_1 = 23$ ja $y_2 = 68$. Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1980, 1985]$ on

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{68 - 23}{1985 - 1980} = 9 \text{ tuhatta liittymää/vuosi.}$$

Muutosnopeus oli pienin vuodesta 1980 vuoteen 1985. Tuolloin matkapuhelinliittymien määrä kasvoi vuodessa keskimäärin 9000 liittymällä.

Vastaus: aikavälillä $[1980, 1985]$, 9000 liittymää/vuosi

115. Lasketaan funktion $f(x) = 3x - 5$ arvot välien päätepisteissä.

$$f(1) = 3 \cdot 1 - 5 = -2$$

$$f(4) = 3 \cdot 4 - 5 = 7$$

$$f(100) = 3 \cdot 100 - 5 = 295$$

$$f(200) = 3 \cdot 200 - 5 = 595$$

$$f(-1000) = 3 \cdot (-1000) - 5 = -3005$$

$$f(6000) = 3 \cdot 6000 - 5 = 17\,995$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1, 4]$ on

$$\frac{7 - (-2)}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[100, 200]$ on

$$\frac{595 - 295}{200 - 100} = \frac{300}{100} = 3.$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-1000, 6000]$ on

$$\frac{17\,995 - (-3005)}{6000 - (-1000)} = \frac{21\,000}{7000} = 3.$$

Funktion f muutosnopeus on joka välillä 3. Tämä johtuu siitä, että funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 3, ja suoran pisteiden kautta piirretty suoran sekantti on suoran suuntainen.

Vastaus: 3

- 116. a)** Pisteet $D = (3, 3)$ ja $E = (4, 0)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[3, 4]$ on $\frac{0-3}{4-3} = \frac{-3}{1} = -3$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on -3 ainakin välillä $[3, 4]$.

Vastaus: esim. $[3, 4]$

- b)** Pisteet $C = (1, -1)$ ja $D = (3, 3)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1, 3]$ on $\frac{3-(-1)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on 2 ainakin välillä $[1, 3]$.

Vastaus: esim. $[1, 3]$

- c)** Pisteet $A = (-2, -2)$ ja $D = (3, 3)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-2, 3]$ on $\frac{3-(-2)}{3-(-2)} = \frac{5}{5} = 1$.

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on 1 ainakin välillä $[-2, 3]$.

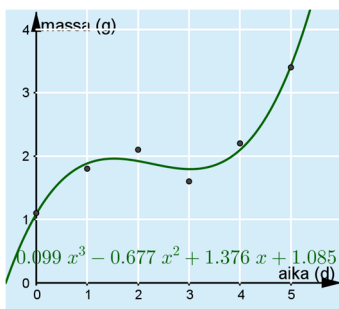
Vastaus: esim. $[-2, 3]$

- d)** Pisteet $B = (-1, 2)$ ja $C = (1, -1)$ ovat kuvaajalla, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-1, 1]$ on $\frac{-1-2}{1-(-1)} = \frac{-3}{2} = -1,5$.

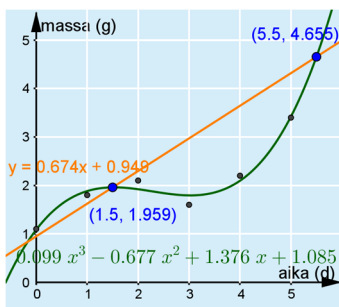
Funktion f keskimääräinen muutosnopeus on $-1,5$ ainakin välillä $[-1, 1]$.

Vastaus: esim. $[-1, 1]$

117. a) Sovitetaan aineistoon 3. asteen polynomifunktio sopivalla ohjelmalla.



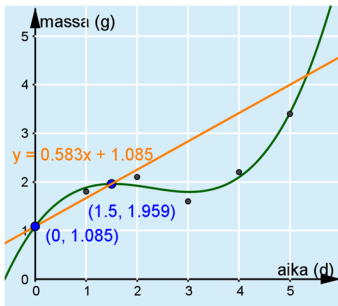
Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 0,099x^3 - 0,677x^2 + 1,376x + 1,085$.
Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 1,5$ ja $x = 5,5$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = 0,674$, joten funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[1,5; 5,5]$ on $0,674 \text{ g/vrk} \approx 0,67 \text{ g/vrk}$.

Vastaus: $f(x) = 0,099x^3 - 0,677x^2 + 1,376x + 1,085$; $0,67 \text{ g/vrk}$

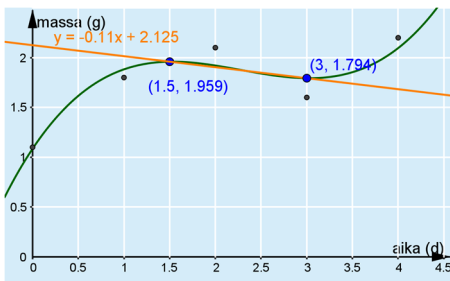
- b) Kuvaajan perusteella populaatio kasvaa noin hetkeen 1,5 vrk asti. Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 0$ ja $x = 1,5$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k \approx 0,583$, joten populaation keskimääräinen kasvunopeus välillä $[0; 1,5]$ on noin 0,58 g/vrk.

Vastaus: 1,5 vrk; 0,58 g/vrk

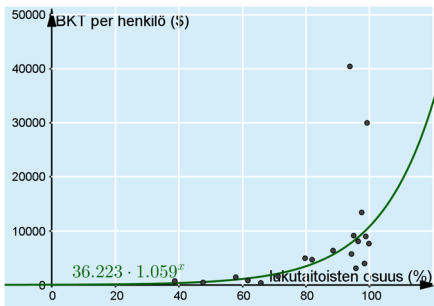
- c) Kuvaajan perusteella populaation koko on pienimmillään noin 3 vuorokauden kohdalla. Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 1,5$ ja $x = 3$ kautta.



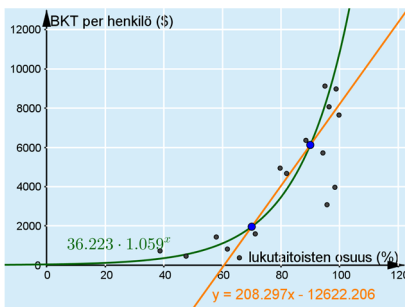
Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k \approx -0,11$, joten populaation keskimääräinen kasvunopeus välillä $[1,5; 3]$ on noin $-0,11$ g/vrk.

Vastaus: 3,0 vrk:n kuluttua; $-0,11$ g/vrk

118. Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 70$ ja $x = 90$ kautta.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = 208,297$, joten yhden prosenttiyksikön nousu lukutaitoisten osuudessa kasvattaa mallin mukaan bruttokansantuotetta $208,297 \$ \approx 208 \$$.

Vastaus: 208 dollarilla

119. a) Funktion f lausekkeessa muutoskerroin on $q = 0,994$, joten joka minuutti isotoopin määrästä on jäljellä 99,4 % edellisen minuutin määrästä. Isotooppia hajoaa siis minuutissa $100 \% - 99,4 \% = 0,6 \%$.

Vastaus: 0,6 %

- b) Lasketaan funktion $f(x) = 2 \cdot 0,994^x$ arvot välien päätepisteissä.
 $f(0) = 2 \cdot 0,994^0 = 2$
 $f(100) = 2 \cdot 0,994^{100} = 1,095\dots$
 $f(200) = 2 \cdot 0,994^{200} = 0,600\dots$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 100]$ on
$$\frac{1,095\dots - 2}{100 - 0} = -0,00904\dots$$

Aikavälillä $[0, 100]$ isotooppia hajoaa minuutissa keskimäärin $0,00904\dots \mu\text{g} \approx 0,0090 \mu\text{g}$.

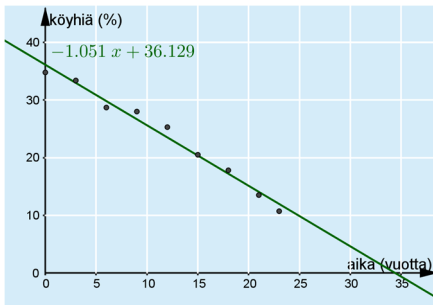
Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[100, 200]$ on
$$\frac{0,600\dots - 1,095\dots}{200 - 100} = -0,00495\dots$$

Aikavälillä $[100, 200]$ isotooppia hajoaa minuutissa keskimäärin $0,00495\dots \mu\text{g} \approx 0,0050 \mu\text{g}$.

Vastaus: $0,0090 \mu\text{g}$ ja $0,0050 \mu\text{g}$

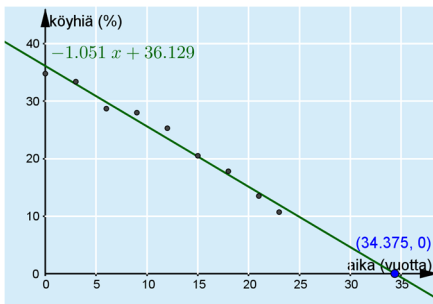
- c) Isotoopin määrä vähenee ajan kuluessa. Kun suuremmasta ja pienemmästä grammamäärästä hajoaa sama prosenttiosuus, niin suuremmasta määrästä hajoaa grammoina mitattuna suurempi määrä isotooppia.

120. a) Sovitetaan aineistoon 1. asteen polynomifunktio.



Ohjelma antaa malliksi funktion $f(x) = -1,051x + 36,129$.

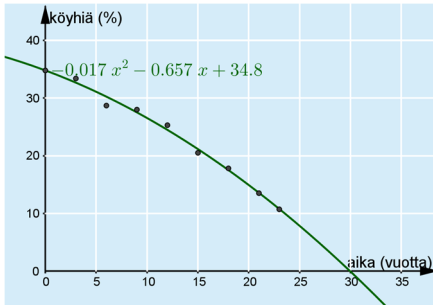
Etsitään funktion f kuvaajan ja x -akselin leikkauspiste ohjelman avulla.



Ohjelma antaa leikkauspisteeksi $(34,375; 0)$.

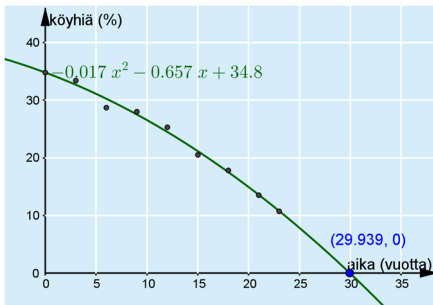
1. asteen polynomisen mallin mukaan absoluuttinen köyhyys loppuu maailmasta 34,375 vuoden kuluttua vuodesta 1990 eli vuonna $1990 + 34,375 = 2024,375 \approx 2024$.

Sovitetaan aineistoon 2. asteen polynomifunktio.



Ohjelma antaa malliksi funktion $g(x) = -0,017x^2 - 0,657x + 34,8$.

Etsitään funktion g kuvaajan ja x -akselin leikkauspiste ohjelman avulla.



Ohjelma antaa leikkauspisteeksi (29,939; 0).

2. asteen polynomisen mallin mukaan absoluuttinen köyhyys loppuu maailmasta 29,939 vuoden kuluttua vuodesta 1990 eli vuonna $1990 + 29,939 = 2019,939 \approx 2020$.

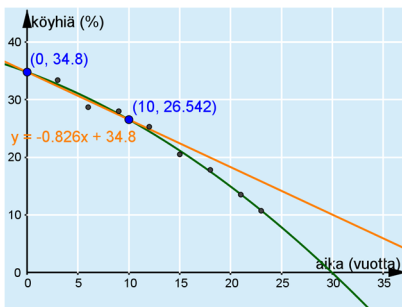
Vastaus: $f(x) = -1,051x + 36,129$, jonka mukaan absoluuttinen köyhyys loppuu vuonna 2024 ja $g(x) = -0,017x^2 - 0,657x + 34,8$, jonka mukaan absoluuttinen köyhyys loppuu vuonna 2020.

- b) Ensimmäisen asteen polynomisen mallin kuvaaja on suora, joten kuvaajalle piirrettyjen sekanttien kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin $k = -1,051$.

Ensimmäisen asteen polynomisen mallin mukaan köyhien osuus aleni sekä aikavälillä 1990–2000 että aikavälillä 2000–2010 vuosittain keskimäärin $1,051 \approx 1,05$ prosenttiyksiköllä.

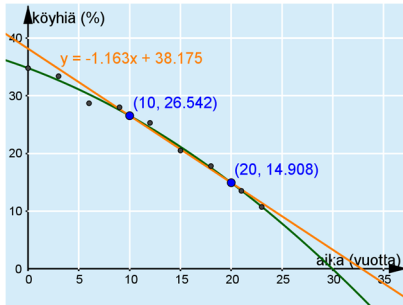
Toisen asteen polynomisen mallin kuvaaja on paraabeli.

Vuosina 1990 ja 2000 oli kulunut 0 ja 10 vuotta vuodesta 1990, joten ajankohtia vastaavat muuttujan x arvot ovat $x = 0$ ja $x = 10$. Piirretään funktion g kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 0$ ja $x = 10$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = -0,826$, joten köyhien määrä aleni toisen asteen polynomisen mallin mukaan ajanjaksolla 1990–2000 keskimäärin $0,826 \approx 0,83$ prosenttiyksiköllä vuodessa.

Vuosina 2000 ja 2010 oli kulunut 10 ja 20 vuotta aikaa vuodesta 1990, joten ajankohtia vastaavat muuttujan x arvot ovat $x = 10$ ja $x = 20$. Piirretään funktion g kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 10$ ja $x = 20$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.

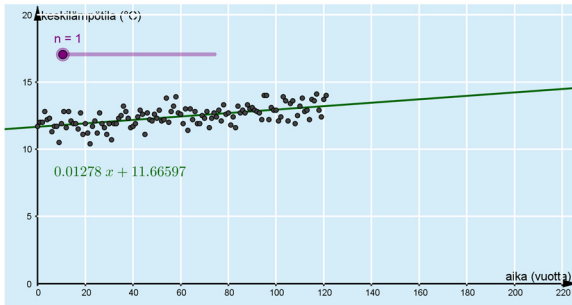


Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = -1,163$, joten köyhien määrä aleni toisen asteen polynomisen mallin mukaan ajanjaksolla 2000–2010 keskimäärin $1,163 \approx 1,16$ prosenttiyksiköllä vuodessa.

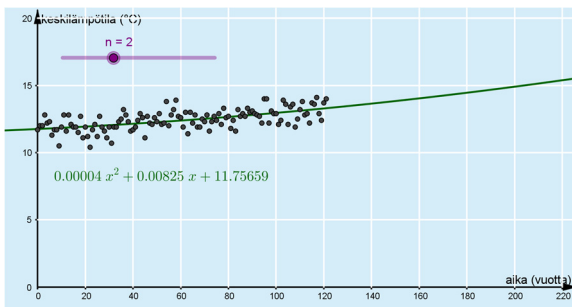
Vastaus: 1. asteen polynomifunktio: 1,05 prosenttiyksiköllä vuodessa ja 1,05 prosenttiyksiköllä vuodessa; 2. asteen polynomifunktio: 0,83 prosenttiyksiköllä vuodessa ja 1,16 prosenttiyksiköllä vuodessa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

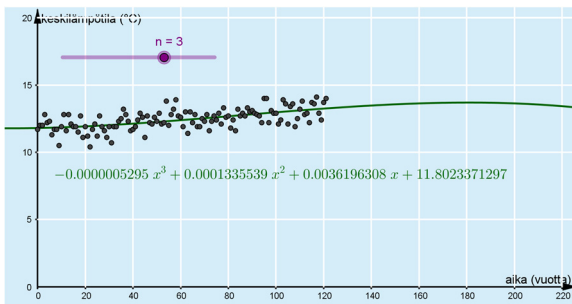
121. a) Mallinnetaan keskilämpötiloja polynomifunktiolla, jossa muuttujana on vuodesta 1895 kulunut aika vuosina, ja jonka asteluku on säädettävissä.



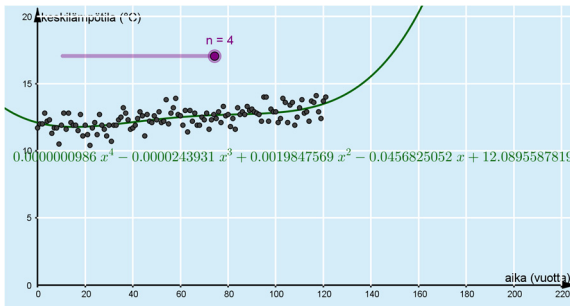
1. asteen polynomifunktion lauseke on $0,01278x + 11,66597$.



2. asteen polynomifunktion lauseke on $0,00004x^2 + 0,00825x + 11,75659$.



3. asteen polynomifunktion lauseke on
 $-0,0000005295x^3 + 0,0001335539x^2 + 0,0036196308x$
 $+ 11,8023371297$.



4. asteen polynomifunktion lauseke on
 $-0,0000000986x^4 - 0,0000243931x^3 + 0,0019847569x^2$
 $- 0,0456825417x + 12,0895592731$.

Vastaus: $f(x) = 0,01278x + 11,66597$;

$f(x) = 0,00004x^2 + 0,00825x + 11,75659$;

$f(x) = -0,0000005295x^3 + 0,0001335539x^2 + 0,0036196308x$
 $+ 11,8023371297$ ja

$f(x) = -0,0000000986x^4 - 0,0000243931x^3 + 0,0019847569x^2$
 $- 0,0456825471x + 12,0895592731$

- b) Kolmannen asteen polynomifunktio ennustaa lämpötilojen lähtevän pitkällä aikavälillä laskuun, vaikka nousuvaihe on kestänyt koko mittaushistorian ajan. Tämän vuoksi malli ei ole kovin uskottava.

Neljännän asteen polynomifunktio ennustaa lämpötilojen lähtevän pian tunnetun mittaushistorian jälkeen huomattavasti jyrkempään nousuun kuin tähän asti on mitattu. Tämän vuoksi malli ei ole kovin uskottava.

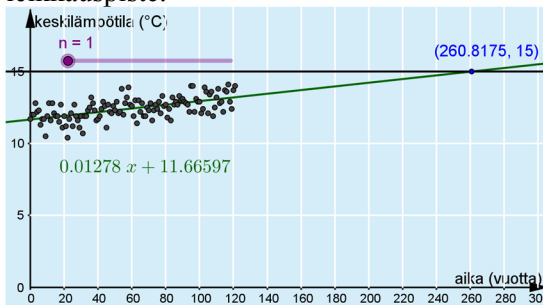
Uskottavimmat neljästä mallista ovat 1. ja 2. asteen polynomifunktio, jotka molemmat ennustavat lämpötilojen nousevan suurin piirtein nykyisellä vauhdilla.

Tutkitaan 1. asteen polynomifunktion antamat ennusteet.

Funktion kuvaaja on suora, joten kuvaajalle piirretyn sekantin kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin $k = 0,01278$.

Lämpötila nousee siis 1. asteen polynomimallin mukaan keskimäärin $0,01278\text{ °C} \approx 0,013\text{ °C}$ vuosittain.

Etsitään ohjelman avulla funktion kuvaajan ja suoran $y = 15$ leikkauspiste.

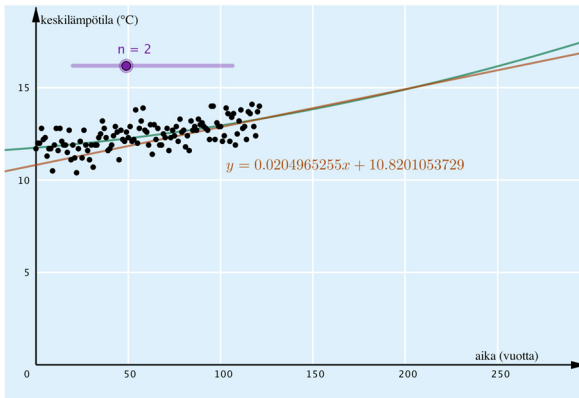


Ohjelma antaa leikkauspisteeksi $(260,8175; 15)$, joten 1. asteen polynomisen mallin mukaan keskilämpötila ylittää 15 °C vuonna $1895 + 260,8175 = 2155,8175 \approx 2156$.

Tutkitaan 2. asteen polynomifunktion antamat ennusteet.

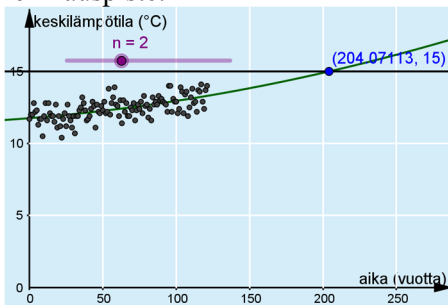
Vuonna 2017 vuodesta 1895 oli kulunut $2017 - 1895 = 122$ vuotta ja vuonna 2100 vuodesta 1895 on kulunut $2100 - 1895 = 205$ vuotta.

Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee pisteiden $x = 122$ ja $x = 205$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakerroin on $k = 0,02049\dots$, joten keskilämpötila nousee 2. asteen polynomisen mallin mukaan ajanjaksolla 2017–2100 keskimäärin $0,02049\dots\text{ °C} \approx 0,020\text{ °C}$ vuosittain.

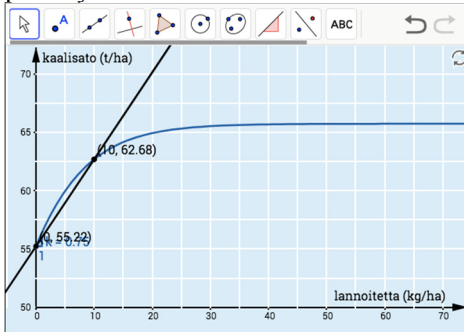
Etsitään ohjelman avulla funktion kuvaajan ja suoran $y = 15$ leikkauspiste.



Ohjelma antaa leikkauspisteeksi $(204,07113; 15)$, joten 2. asteen polynomisen mallin mukaan keskilämpötila ylittää 15 °C vuonna $1895 + 204,07113 = 2099,07113 \approx 2099$.

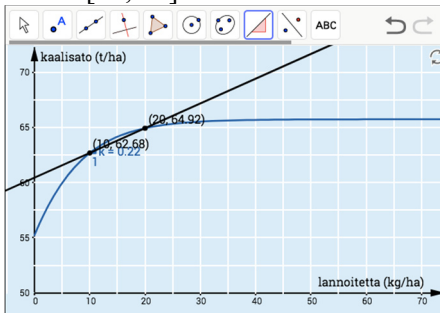
Vastaus: 1. asteen polynomifunktio: $0,013\text{ °C/vuosi}$, vuonna 2156;
2. asteen polynomifunktio: $0,020\text{ °C/vuosi}$, vuonna 2099

122. a) Määritetään appletin avulla sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 10]$. Muutosnopeus on kohtien $x = 0$ ja $x = 10$ kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.



Appletin avulla kulmakertoimeksi saadaan $k = 0,75$, joten sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 10]$ on 0,75 tonnia/kg.

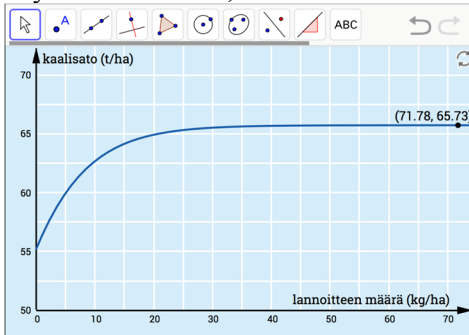
Määritetään vastaavalla tavalla sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä $[10, 20]$.



Appletin avulla kohtien $x = 10$ ja $x = 20$ kautta kulkevan sekantin kulmakertoimeksi saadaan $k = 0,22$, joten sadon keskimääräinen muutosnopeus välillä $[10, 20]$ on 0,22 tonnia/kg.

Vastaus: 0,75 tonnia/kg ja 0,22 tonnia/kg

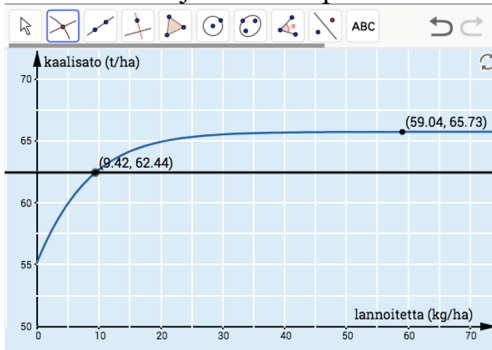
- b) Funktion kuvaajan perusteella sadon suurin mahdollinen määrä näyttäisi olevan 65,73 tonnia/ha $\approx$ 66 tonnia/ha.



Vastaus: n. 66 tonnia/ha

- c) Tavoitesato on 95 % maksimaalisesta sadosta, eli $0,95 \cdot 65,73$ tonnia/ha = 62,443... tonnia/ha.

Piirretään suora $y = 62,443...$ ja määritetään appletin avulla suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.

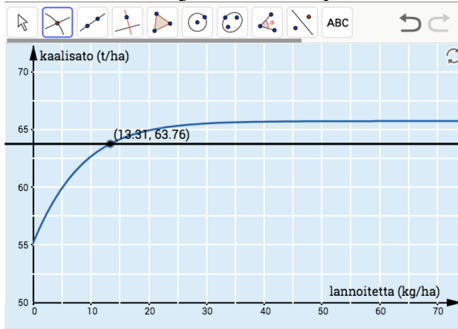


Leikkauspisteen x -koordinaatti on 9,42, joten jotta tavoitesato saataisiin, pitäisi lannoittaa 9,42 kg/ha $\approx$ 9,4 kg/ha.

Vastaus: 9,4 kg/ha

- d) Tavoitesato on 97 % maksimaalisesta sadosta, eli
 $0,97 \cdot 65,73 \text{ tonnia/ha} = 63,758 \dots \text{ tonnia/ha}.$

Piirretään suora $y = 63,758$ ja määritetään appletin avulla suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.



Leikkauspisteen x -koordinaatti on 13,31, joten jotta tavoitesato saataisiin, pitäisi lannoittaa $13,31 \text{ kg/ha} \approx 13,3 \text{ kg/ha}.$

Vastaus: 13,3 kg/ha

- e) Tuotto saadaan vähentämällä tuloista menot. Tulot saadaan kaalin myynnistä. Kaalitonnin hinta on 550 €. Menot aiheutuvat fosforilannoitteen määrästä. Lannoitekilo maksaa 2 €.

Tarkastellaan ensin 95 %:n tavoitesatoa.

Tulot: $62,443 \dots \cdot 550 \text{ €} = 34\,343,925 \text{ €} \approx 34\,343,93 \text{ €}$

Menot: $9,42 \cdot 2 \text{ €} = 18,84 \text{ €}$

Tuotto on siis $34\,343,93 \text{ €} - 18,84 \text{ €} = 34\,325,09 \text{ €}.$

Tarkastellaan sitten 97 %:n tavoitesatoa.

Tulot: $63,758 \dots \cdot 550 \text{ €} = 35\,066,955 \text{ €} \approx 35\,066,96 \text{ €}$

Menot: $13,31 \cdot 2 \text{ €} = 26,62 \text{ €}$

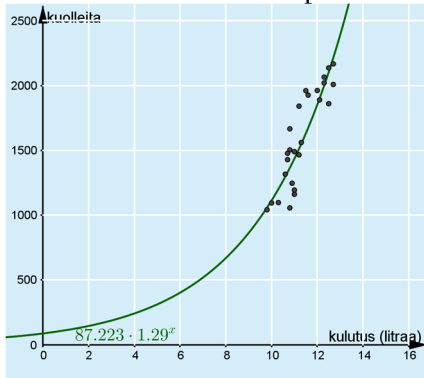
Tuotto on siis $35\,066,96 \text{ €} - 26,62 \text{ €} = 35\,040,34 \text{ €}.$

Lannoitusmäärän nostamisella saadaan

$35\,040,34 \text{ €} - 34\,325,09 \text{ €} = 715,25 \text{ €:n}$ tuotto.

Vastaus: 715,25 €

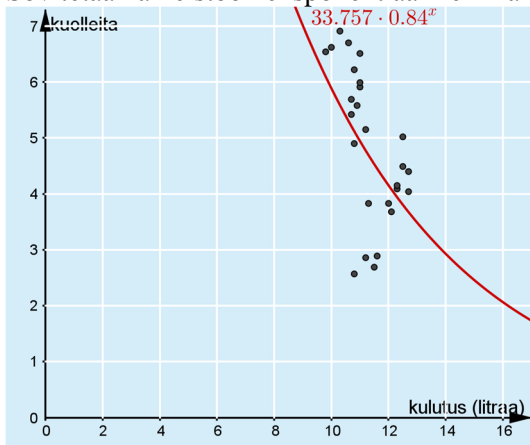
123. a) Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 87,223 \cdot 1,29x$.

Vastaus: $f(x) = 87,223 \cdot 1,29x$

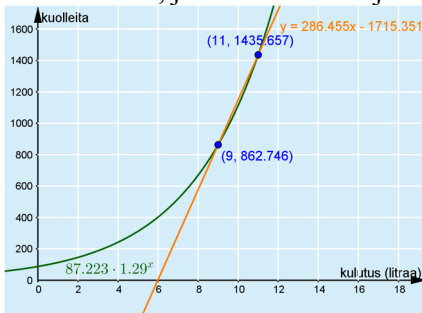
b) Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa funktioksi $g(x) = 33,757 \cdot 0,84x$.

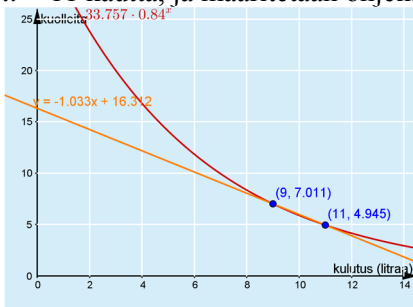
Vastaus: $g(x) = 33,757 \cdot 0,84x$

- c) Piirretään funktion f kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 9$ ja $x = 11$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi 286,455, joten a-kohdan mallin mukaan alkoholiperäisiin sairauksiin ja alkoholimyrkytykseen kuolleiden määrä kasvaa litran kulutuksen kasvua kohti keskimäärin $286,455 \approx 286$:lla.

- Piirretään funktion g kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 9$ ja $x = 11$ kautta, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.

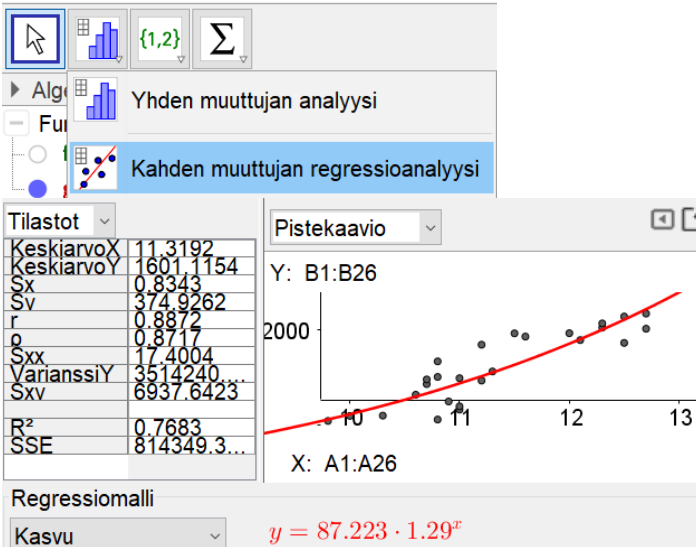


Sekantin kulmakerroin on $-1,033$, joten b-kohdan mallin mukaan henkikirikosten uhrien määrä pienenee litran kulutuksen kasvua kohti keskimäärin $1,033 \approx 1$:llä.

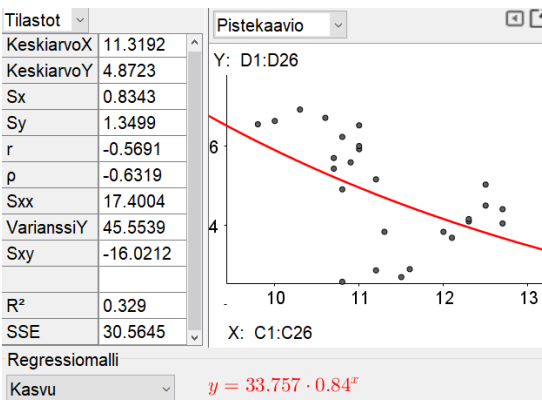
Vastaus: kasvaa 286:lla ja pienenee yhdellä

d) Selvitetään mallien selitysteet.

Tiedosto Muokkaa Näytä Asetukset Työkalut Ikk



Ohjelma antaa a-kohdan mallin selitysteeksi $R^2 = 0,7683 = 76,83 \%$, joten alkoholin vuosikulutus selittää $76,83 \% \approx 77 \%$ alkoholiperäisiin sairauksiin ja alkoholimyrkytyksiin kuolleiden määrän kasvusta.



Ohjelma antaa b-kohdan mallin selitysteeksi $R^2 = 0,329 = 32,9 \%$, joten alkoholin vuosikulutus selittää $32,9 \% \approx 33 \%$ henkirikosten määrän vähenemisestä.

Vastaus: $R^2 = 0,77$ ja $R^2 = 0,33$

124. a) Koska funktion f keskimääräinen muutosnopeus on kaikilla väleillä 2, niin funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on 2. Funktion f lauseke on siis muotoa $f(x) = 2x + b$.

Sijoitetaan funktion f lausekkeeseen $x = 5$ ja $f(5) = -1$. Ratkaistaan vakiotermi b yhtälön avulla.

$$-1 = 2 \cdot 5 + b$$

$$-1 = 10 + b$$

$$b = -1 - 10$$

$$b = -11$$

Vastaus: $f(x) = 2x - 11$

- b) Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, joten sen lauseke on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Koska $f(0) = -1$, joten sijoitetaan funktion f lausekkeeseen $x = 0$ ja $f(0) = -1$ ja muodostetaan yhtälö.

$$-1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = -1$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0, 2]$ on 1, joten $f(2) = f(0) + 2 \cdot 1 = -1 + 2 \cdot 1 = 1$.

Sijoitetaan funktion f lausekkeeseen $x = 2$ ja $f(2) = 1$ ja muodostetaan yhtälö.

$$1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1$$

$$1 = 4a + 2b - 1$$

$$4a + 2b = 2$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä $[2, 4]$ on 4, joten $f(4) = f(2) + 2 \cdot 4 = 1 + 2 \cdot 4 = 9$.

Sijoitetaan funktion f lausekkeeseen $x = 4$ ja $f(4) = 9$ ja muodostetaan yhtälö.

$$9 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 - 1$$

$$9 = 16a + 4b - 1$$

$$16a + 4b = 10$$

Muodostetaan edellä saaduista yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan siitä a .

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 4a + 2b = 2 \\ 16a + 4b = 10 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \parallel : (-2) \\ \parallel : 4 \end{array} \\ + \left\{ \begin{array}{l} -2a - b = -1 \\ 4a + b = \frac{5}{2} \end{array} \right. \\ \hline -2a + 4a - b + b = -1 + \frac{5}{2} \\ 2a = \frac{3}{2} \quad \parallel : 2 \\ a = \frac{3}{4} \end{array}$$

Sijoitetaan yhtälöön $4a + 2b = 2$ edellä saatu $a = \frac{3}{4}$ ja ratkaistaan b .

$$\begin{array}{l} 4 \cdot \frac{3}{4} + 2b = 2 \\ 3 + 2b = 2 \\ 2b = 2 - 3 \\ 2b = -1 \quad \parallel : 2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Funktion f lauseke on siis $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$.

Vastaus: $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$

125. a) Sievennetään.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} \\ &= \frac{L}{1 + e^{-kx + kx_0}} \end{aligned}$$

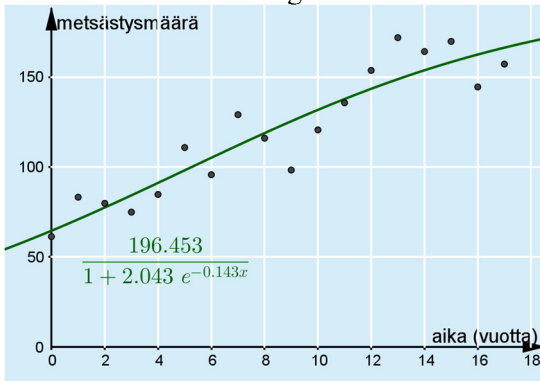
Käyttämällä samankantaisten potenssien tulon laskusääntöä
 $am \cdot an = a^{m+n}$ oikealta vasemmalle saadaan

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{1 + e^{-kx} \cdot e^{kx_0}} \\ &= \frac{L}{1 + e^{kx_0} \cdot e^{-kx}}. \end{aligned}$$

Koska e , k ja x_0 ovat vakioita, luku e^{kx_0} on vakio, ja sitä voidaan merkitä lyhemmin yhdellä kirjaimella. Valitaan tuoksi kirjaimeksi kirjain b .

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{1 + b \cdot e^{-kx}} \\ &= \frac{L}{1 + be^{-kx}}, \text{ jossa } b = e^{kx_0}. \end{aligned}$$

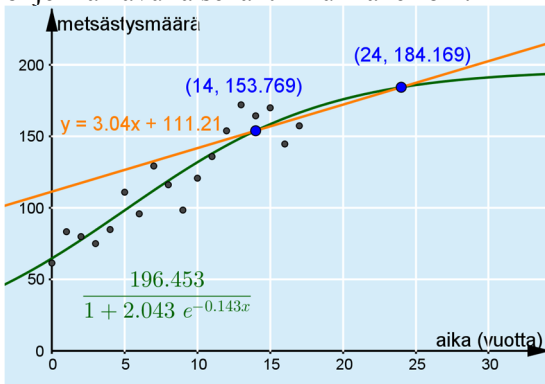
b) Sovitetaan aineistoon logistinen funktio.



Ohjelma antaa funktion lausekkeeksi $f(x) = \frac{196,453}{1 + 2,043e^{-0,143x}}$.

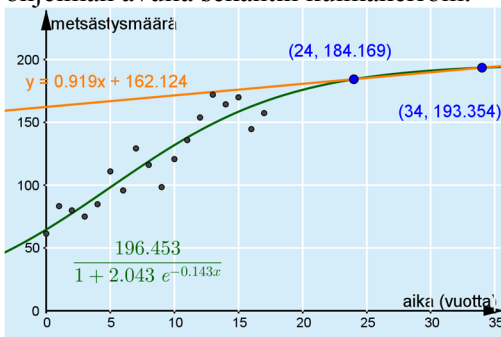
Vastaus: $f(x) = \frac{196,453}{1 + 2,043e^{-0,143x}}$

- c) Vuonna 2010 vuodesta 1996 on kulunut aikaa 14 vuotta ja vuonna 2020 24 vuotta. Piirretään funktion f kuvaajalle sekantti niiden pisteiden kautta, joiden x -koordinaatit ovat 14 ja 24, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = 3,04$, joten b-kohdan mallin mukaan metsästettyjen supikoirien määrä kasvaa vuodessa ajanjaksolla 2010–2020 keskimäärin $3,04 \approx 3$ yksilöä vuodessa.

Vuonna 2020 vuodesta 1996 on kulunut aikaa 24 vuotta ja vuonna 2030 34 vuotta. Piirretään funktion f kuvaajalle sekantti niiden pisteiden kautta, joiden x -koordinaatit ovat 24 ja 34, ja määritetään ohjelman avulla sekantin kulmakerroin.



Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = 0,919$, joten b-kohdan mallin mukaan metsästettyjen supikoirien määrä kasvaa vuodessa ajanjaksolla 2020–2030 keskimäärin $0,919 \approx 1$ yksilön vuodessa.

Vastaus: 3 yksilöä ja 1 yksilö

- d) Kuvaajan perusteella supikoirien määrä näyttäisi vakiintuvan hieman alle 200 yksilön tasolle. Tämä johtuu siitä, että funktion f lausekkeessa
$$f(x) = \frac{196,453}{1 + 2,043e^{-0,143x}}$$
 osoittaja on 196,453 ja nimittäjä on aina yli 1, sillä $e^{-0,143x} > 0$. Kun positiivinen luku 196,453 jaetaan lukua 1 suuremmalla luvulla, on osamäärä aina jaettavaa pienempi.

Vastaus: hieman alle 200 yksilöön

1.2 Hetkellinen muutosnopeus

ALOITA PERUSTEISTA

126. a) Kuvasta nähdään, että kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 2. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis 2.

Vastaus: 2

- b) Kuvasta nähdään, että kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -2 . Funktion f derivaatta kohdassa $x = -1$ on siis -2 .

Vastaus: -2

127. a) Kuvan perusteella pisteet $(-1, -2)$ ja $(0, 4)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = -1$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on $\frac{4 - (-2)}{0 - (-1)} = \frac{6}{1} = 6$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = -1$ on 6.

Vastaus: 6

- b) Kuvan perusteella pisteet $(1, 0)$ ja $(2, -2)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on $\frac{-2 - 0}{2 - 1} = \frac{-2}{1} = -2$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on -2 .

Vastaus: -2

- 128. a)** Kuvan perusteella pisteet $(100, 5)$ ja $(120, 6)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 55$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on siis

$$\frac{6-5}{120-100} = \frac{1}{20} = 0,05,$$

joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 55$ on $0,05$.

Kuvan perusteella pisteet $(40, 0)$ ja $(60, 2)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 105$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on siis

$$\frac{2-0}{60-40} = \frac{2}{20} = 0,1,$$

joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 105$ on $0,1$.

Vastaus: $0,05$ ja $0,1$

- b)** Tulokset tarkoittavat, että vuonna 1955 maailman väkiluvun kasvunopeus oli $0,05$ miljardia eli 50 miljoonaa vuodessa, ja vuonna 2005 kasvunopeus oli $0,1$ miljardia eli 100 miljoonaa vuodessa.

Vastaus: Vuonna 1955 maailman väkiluvun kasvunopeus oli 50 miljoonaa vuodessa, ja vuonna 2005 kasvunopeus oli 100 miljoonaa vuodessa.

- 129.** Kuvaajalle kohtiin $x = -2$ ja $x = 1$ piirretyt tangentit ovat x -akselin suuntaisia, joten niiden kulmakerroin on 0 . Funktion f derivaatta on siis molemmissa kohdissa 0 .

Vastaus: 0 ja 0

- 130.** a) Kuvaajan perusteella lämpötila laskee noin klo 0–6 ja 17–24 ja nousee noin klo 6–17.

Vastaus: laskee n. klo 0–6 ja n. klo 17–24, nousee n. klo 6–17

- b) Kuvan perusteella pisteet (7; 13,9) ja (17, 20) ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 7$ piirretyllä tangentilla.

$$\text{Tangentin kulmakerroin on } k = \frac{20 - 13,9}{17 - 7} = \frac{6,1}{10} = 0,61,$$

joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 7$ on 0,61.

Kuvan perusteella pisteet (18, 20) ja (21; 14,6) ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 21$ piirretyllä tangentilla.

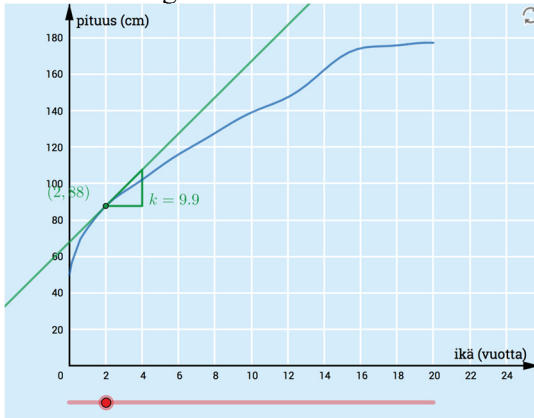
$$\text{Tangentin kulmakerroin on } k = \frac{14,6 - 20}{21 - 18} = \frac{-5,4}{3} = -1,8,$$

joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 21$ on $-1,8$.

Tulokset tarkoittavat, että klo 7.00 lämpötila nousi $0,61\text{ }^{\circ}\text{C/h}$ ja klo 21.00 lämpötila laski $1,8\text{ }^{\circ}\text{C/h}$.

Vastaus: 0,61 ja $-1,8$; klo 7.00 lämpötila nousi $0,61\text{ }^{\circ}\text{C/h}$ ja klo 21.00 lämpötila laski $1,8\text{ }^{\circ}\text{C/h}$

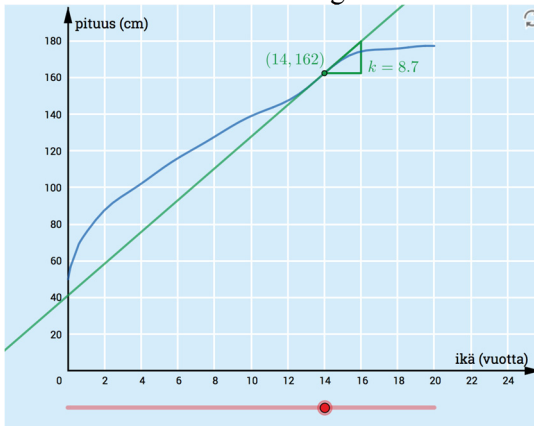
131. a) Siirretään tangentti kohtaan $x = 2$.



Henkilön pituus 2-vuotiaana oli noin 88 cm.
Kohdassa $x = 2$ tangentin kulmakerroin on $k = 9,9 \approx 10$. Henkilön kasvunopeus 2-vuotiaana on noin 10 cm/vuosi.

Vastaus: 88 cm, 10 cm/vuosi

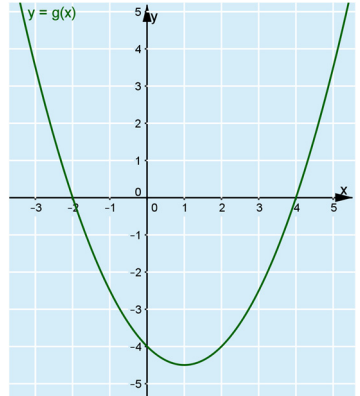
b) Ikävuosien 10 ja 20 välillä henkilö näyttäisi kasvavan nopeimmin noin 14-vuotiaana. Siirretään tangentti kohtaan $x = 14$.



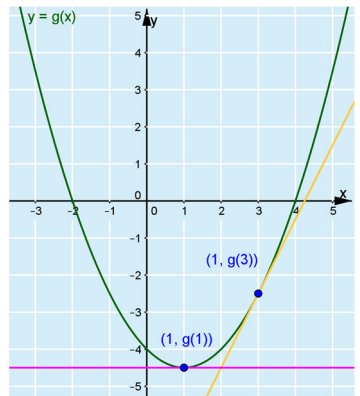
Kohdassa $x = 14$ tangentin kulmakerroin on $k = 8,7 \approx 9$. Henkilö kasvoi nopeimmin noin 14-vuotiaana, jolloin kasvunopeus oli noin 9 cm/vuosi.

Vastaus: 14-vuotiaana, 9 cm/vuosi

132. a) Piirretään funktion $g(x) = 0,5x^2 - x - 4$ kuvaaja sopivalla ohjelmalla.



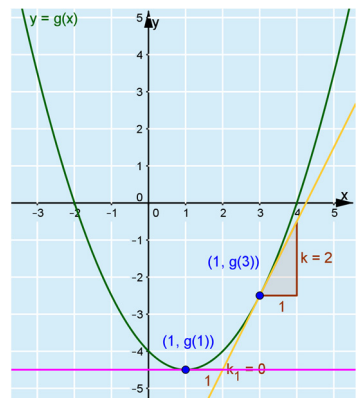
- b) Piirretään ohjelman avulla funktion g kuvaajalle tangentit kohtiin $x = 1$ ja $x = 3$.



- c) Määritetään b-kohdassa piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ohjelman avulla.

Kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 0. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on siis 0.

Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin 2. Funktion f derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis 2.

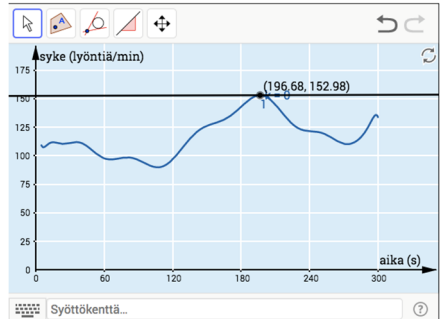


Vastaus: 0 ja 2

VAHVISTA OSAAMISTA

133. a) Syke on korkeimmillaan noin 153 lyöntiä/minuutti.

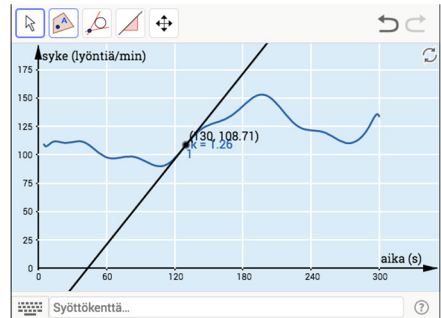
Vastaus: n. 153 lyöntiä/min



- b) Aika sekunteina on $2 \text{ min } 10 \text{ s} = 2 \cdot 60 \text{ s} + 10 \text{ s} = 130 \text{ s}$.

Syke nousee hetkellä 130 s
noin 1,3 lyöntiä minuutissa.

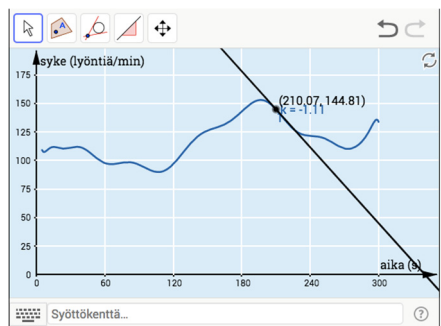
Vastaus: n. 1,3 lyöntiä/min



- c) Aika sekunteina on $3 \text{ min } 30 \text{ s} = 3 \cdot 60 \text{ s} + 30 \text{ s} = 210 \text{ s}$.

Syke alenee hetkellä 210 s
noin 1,10 lyöntiä minuutissa.

Vastaus: n. 1,10 lyöntiä/min



134. a) Kuvaaja nousee kohdassa A jyrkemmin kuin kohdassa B, joten Hilla kulkee nopeammin hetkellä A.

Vastaus: ajanhetkellä A

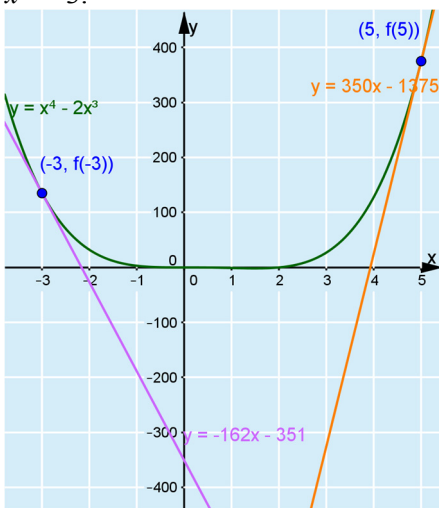
- b) Juuri ennen hetkeä C kuvaaja nousee eli Hilla liikkuu. Hetken C jälkeen kuvaaja on x -akselin suuntainen, joten Hilla ei liiku. Hetkellä C Hilla siis pysähtyy.

Vastaus: Hilla pysähtyy.

- c) Hetkestä C hetkeen D kuvaaja on aika-akselin suuntainen, eli kuljettu matka ei muutu. Hilla on siis tuon ajan paikallaan.

Vastaus: Hilla ei liiku.

135. Piirretään funktion $g(x) = x^4 - 2x^3$ kuvaaja ja sille tangentit kohtiin $x = 5$ ja $x = -3$.



Kohtaan $x = 5$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 350, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 5$ on 350.

Kohtaan $x = -3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on -162 , joten funktion f derivaatta kohdassa $x = -3$ on -162 .

Vastaus: 350 ja -162

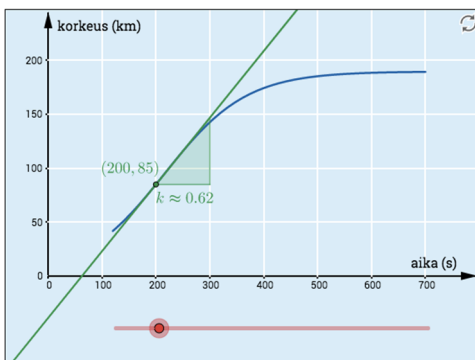
136. a) Kuvan perusteella pisteet $(0, 6)$ ja $(1, 0)$ ovat funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretyllä tangentilla. Tangentin kulmakerroin on $k = \frac{0-6}{1-0} = -6$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 0$ on -6 .

Vastaus: -6

- b) Kuvan perusteella kohtiin $x = -2$ ja $x = 3$ piirretyt tangentit ovat x -akselin suuntaisia, joten niiden kulmakerroin on 0 . Siis funktion f derivaatta on 0 kohdissa $x = -2$ ja $x = 3$.

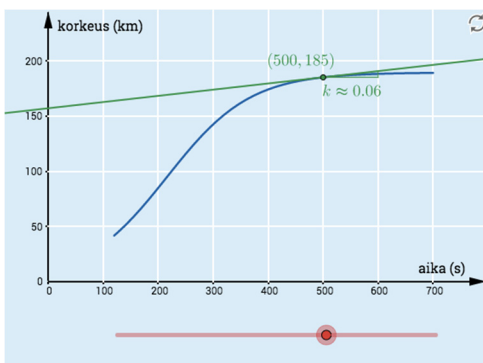
Vastaus: $x = -2$ ja $x = 3$

137. a) Siirretään tangentti kohtaan $x = 200$.



Funktion derivaatta kohdassa $x = 200$ on tangentin kulmakerroin $k \approx 0,62$.

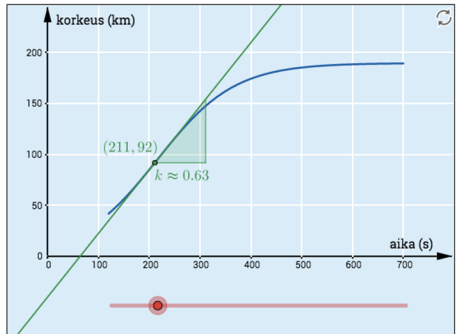
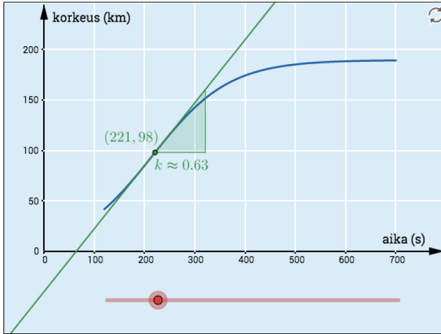
Siirretään tangentti kohtaan $x = 500$.



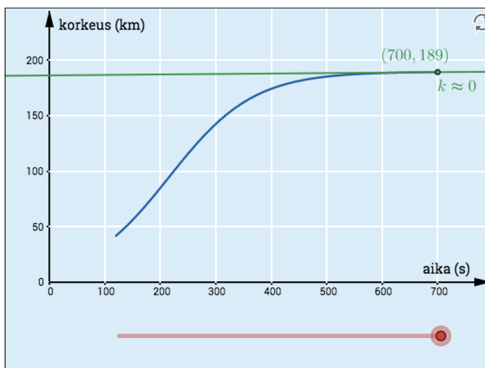
Funktion derivaatta kohdassa $x = 500$ on tangentin kulmakerroin $k \approx 0,06$.

Vastaus: n. 0,62 ja n. 0,06

- b) Funktion f derivaatta on suurin siinä kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on suurin. Appletin mukaan tangentin kulmakerroin on suurin, kun tangentti on piirretty kuvaajan pisteeseen, jonka x -koordinaatti on välillä $[211, 221]$.



Funktion f derivaatta on pienin siinä kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on pienin. Appletin mukaan tangentin kulmakerroin on pienin, kun tangentti on piirretty kuvaajan pisteeseen, jonka x -koordinaatti on välillä $[687, 700]$.



Vastaus: suurin aikavälillä 211 s–221 s, pienin aikavälillä 687 s–700 s

- c) Derivaatta näyttää ajan kuluessa lähestyvän arvoa 0.

Vastaus: lähestyy nollaa

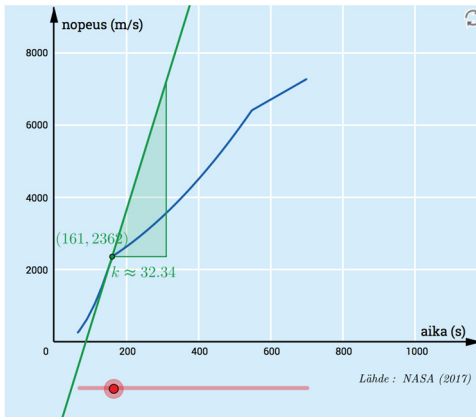
- d) Kohdan a tulos tarkoittaa, että ajanhetkellä 200 s raketti etäännyy maasta 0,62 km sekunnissa ja ajanhetkellä 500 s 0,06 km sekunnissa.

Kohdan b tulos tarkoittaa, että raketin korkeus maanpinnasta kasvaa nopeimmin aikavälillä 211 s–220 s ja hitaimmin aikavälillä 687 s–700 s.

Kohdan c mukaan raketti ei enää etäänny maanpinnasta.

Vastaus: a-kohta: Ajanhetkellä 200 s raketti etäännyy maasta 0,62 km sekunnissa ja ajanhetkellä 500 s 0,06 km sekunnissa. b-kohta: Raketin etäisyys maanpinnasta kasvaa nopeimmin aikavälillä 211 s–221 s ja hitaimmin aikavälillä 687 s–700 s. c-kohta: Raketti ei enää etäänny maanpinnasta.

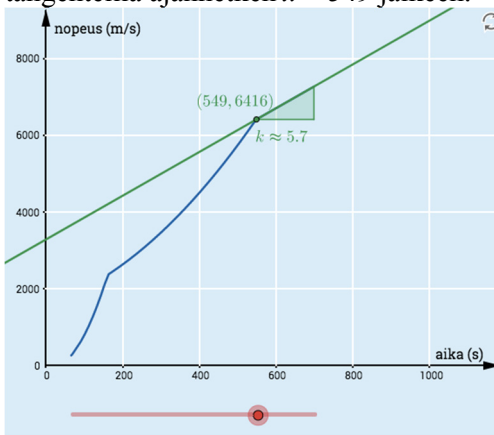
138. a) Nopeuden kasvu on suurin kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on suurin. Appletin mukaan tämä kohta on $x = 161$.



Nopeuden kasvu on suurin ajanhetkellä noin 161 s.

Vastaus: 161 s

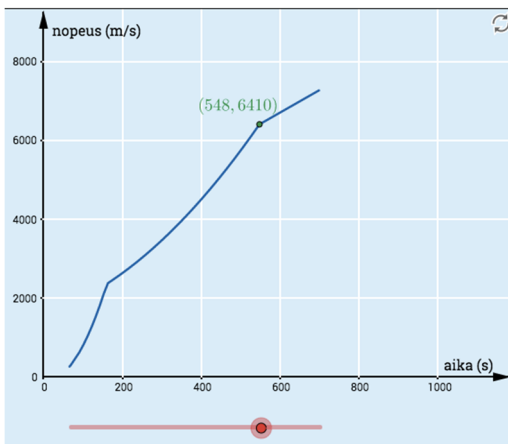
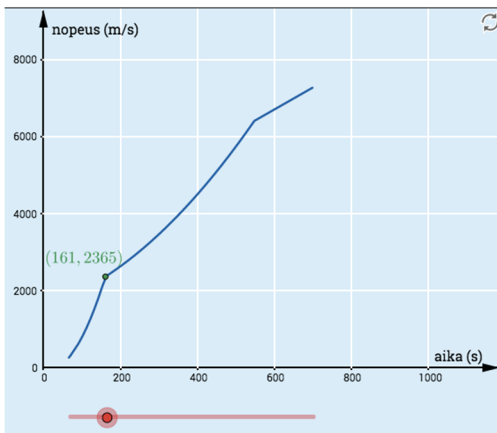
- b) Nopeuden kasvu on pienin kohdassa, johon piirretyn tangentin kulmakerroin on pienin. Appletin mukaan pienin kulmakerroin on tangenteilla ajanhetken $x = 549$ jälkeen.



Nopeuden kasvu on pienin ajanhetkestä 549 s eteenpäin.

Vastaus: ajanhetkestä 549 s eteenpäin

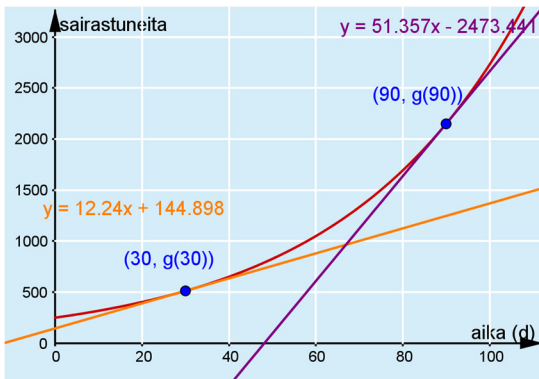
- c) Ajanhetkinä $x = 161$ ja $x = 548$ kuvaajassa on terävät kärjet. Näihin voidaan piirtää useita tangentteja, joten derivaattaa ei voi määrittää ajanhetkinä $x = 161$ ja $x = 548$.



Vastaus: Derivaattaa ei voi määrittää.

139. a) Koska kesäkuun alusta syyskuun loppuun on $30 + 31 + 31 + 30 = 122$ päivää, malli on järkevä välillä $0 \leq x \leq 122$. Piirretään funktion

$g(x) = 250 \cdot 2^{\frac{x}{29}}$, jossa $0 \leq x \leq 122$, ja piirretään kuvaajalle tangentit kohtiin $x = 30$ ja $x = 90$.



Kohtaan $x = 30$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 12,24, joten funktion g derivaatta kohdassa $x = 30$ on 12,24.

Kohtaan $x = 90$ piirretyn tangentin kulmakerroin on 51,357, joten funktion g derivaatta kohdassa $x = 90$ on 51,357.

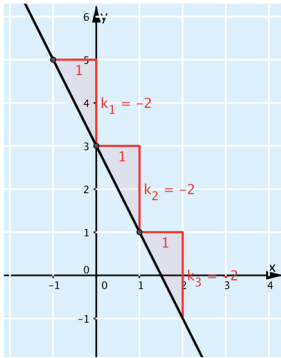
Tulokset tarkoittavat, että 30 vuorokauden kohdalla tartunnan saaneiden määrä kasvoi $12,24 \approx 12$ henkilöllä vuorokaudessa ja 90 vuorokauden kohdalla $51,357 \approx 51$ henkilöllä vuorokaudessa.

Vastaus: 12 ja 51, tartunnan saaneiden määrä kasvoi 12 henkilöllä ja 51 henkilöllä päivässä

- b) Kuvaaja on jyrkin tutkittavan ajanjakson lopussa eli hetkellä $x = 122$. Tämä vastaa syyskuun loppua.

Vastaus: syyskuun lopussa

140. a) Piirretään funktion $f(x) = -2x + 3$ kuvaaja sopivalla ohjelmalla. Piirretään kuvaajalle tangentit kohtiin $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$. Määritetään tangenttien kulmakertoimet ohjelman avulla.



Tangenttien kulmakertoimet ovat -2 , joten funktion f derivaatta kohdissa $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 1$ on -2 .

Vastaus: -2 , -2 ja -2

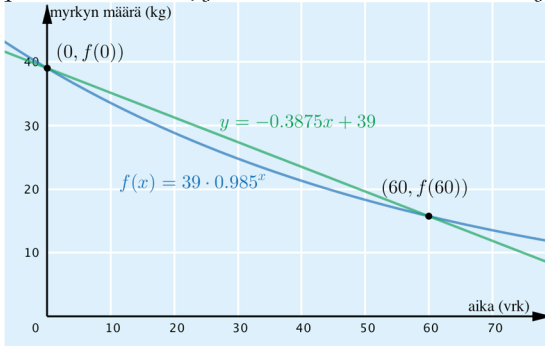
- b) Kohdan a mukaan suoralle piirretty tangentti on suora itse, joten tangentin kulmakerroin on sama kuin suoran kulmakerroin.

Funktion $g(x) = kx + b$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on k . Funktiolle mihin tahansa kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on k ja funktion f derivaatta jokaisessa kohdassa on siis k .

Vastaus: k

- 141.** Eksponentiaalisen mallin alkuperäinen arvo on 39 ja muutoskerroin $100\% - 1,5\% = 98,5\% = 0,985$.
Malli on siis $f(x) = 39 \cdot 0,985^x$.

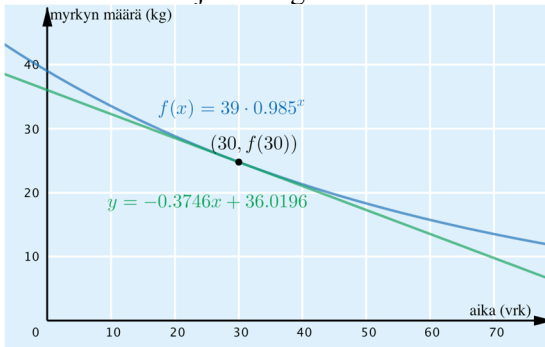
- a)** Piirretään funktion f kuvaaja ja piirretään kuvaajalle sekantti niiden pisteiden kautta, joiden x -koordinaatit ovat 0 ja 60.



Sekantin kulmakerroin on noin $-0,39$, joten järjessä olevan myrkyn määrä vähenee ensimmäisen 60 päivän aikana keskimäärin noin $0,39 \text{ kg} = 390 \text{ g}$ vuorokaudessa.

Vastaus: 390 g/vrk

- b)** Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 30$.



Tangentin kulmakerroin on noin $-0,37$, joten 30 vuorokauden kuluttua onnettomuudesta myrkyn määrä vähenee noin $0,37 \text{ kg} = 370 \text{ g}$ vuorokaudessa.

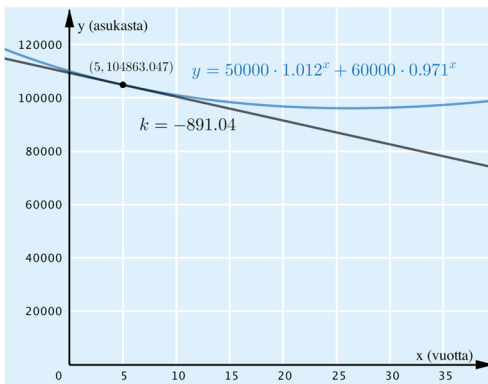
Vastaus: 370 g/vrk

142. a) Kaupungin A väkiluku kasvaa vuodessa 1,2 %, joten väkiluku tulee 1,012-kertaiseksi vuosittain.
Kaupungin B väkiluku vähenee vuodessa 2,9 %, joten väkiluku tulee 0,971-kertaiseksi vuosittain.

Kaupungin A väkilukua kuvaa lauseke $50\,000 \cdot 1,012^x$ ja kaupungin B väkilukua $60\,000 \cdot 0,971^x$. Muodostetaan funktio kaupunkien yhteenlasketulle väkiluvulle.

$$f(x) = 50\,000 \cdot 1,012^x + 60\,000 \cdot 0,971^x$$

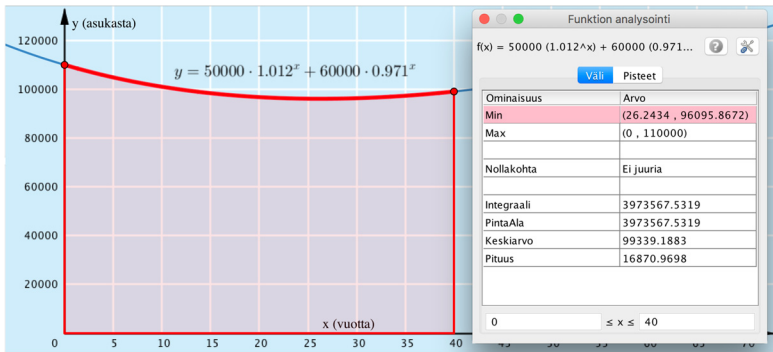
Piirretään funktion kuvaaja sopivalla ohjelmalla. Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 5$ ja määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakerroin on $k = -891,04$, joten kaupunkien yhteenlaskettu väkiluku vähenee noin 890 asukasta vuodessa.

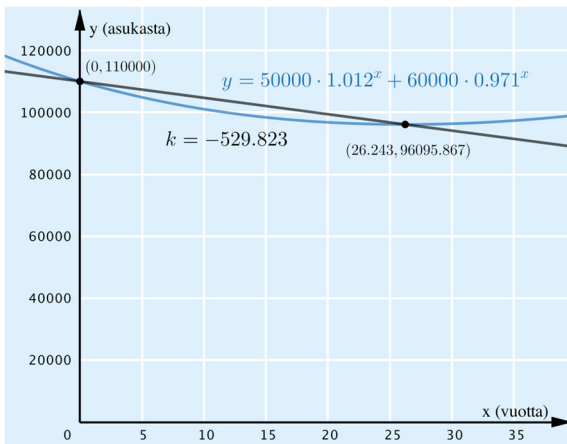
Vastaus: 890 asukasta/vuosi

- b) Määritetään ohjelman funktion analysointi-toiminnolla kohta, jossa väkiluku on alhaisimmillaan.



Väkiluku on alhaisimmillaan 26,243... vuoden kuluttua, joten kaupunkien yhteenlaskettu väkiluku vähenee noin 26 vuoden ajan.

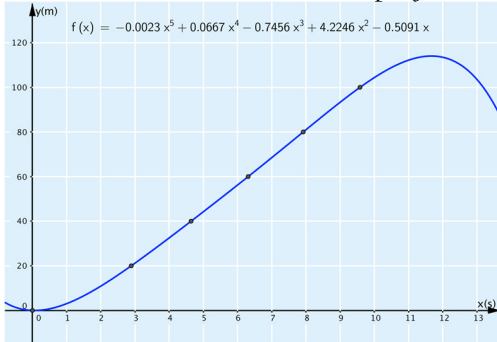
Piirretään funktion kuvaajalle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 0$ ja $x = 26,243$ kautta ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakerroin on $k = -529,82$, joten kaupunkien yhteenlaskettu väkiluku vähenee keskimäärin noin 530 asukasta vuodessa.

Vastaus: 26 vuoden ajan, 530 asukasta/vuosi

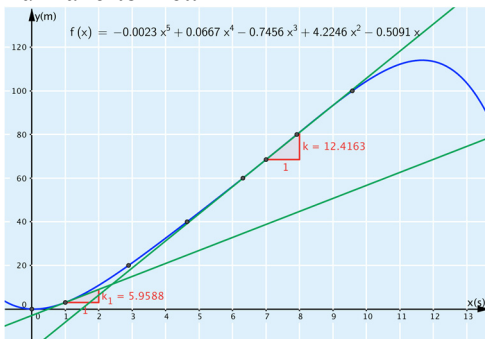
143. Sovitetaan aineistoon 5. asteen polynomifunktio.



Funktion lauseke on

$$f(x) = -0,0023x^5 + 0,0667x^4 - 0,7456x^3 + 4,2246x^2 - 0,5091x.$$

Määritetään funktiolle kohtiin $x = 1$ ja $x = 7$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet.



Funktion derivaatta kohdassa $x = 1$ on $5,958... \approx 5,96$ ja kohdassa $x = 7$ on $12,416... \approx 12,42$.

Kohdan derivaattojen erotus on

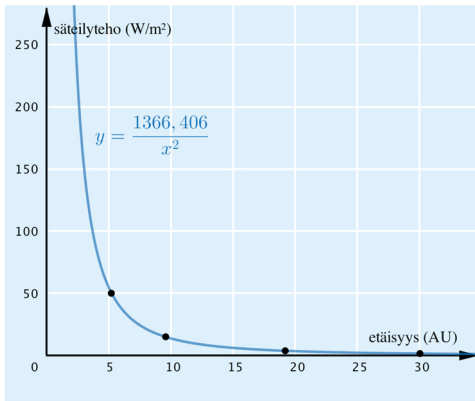
$$12,416... - 5,958... = 6,457... \approx 6,46.$$

Boltin juoksunopeus kasvoi aikavälillä 1 s - 7 s yhteensä $6,46$ m/s.

Vastaus: $f(x) = -0,0023x^5 + 0,0667x^4 - 0,7456x^3 + 4,2246x^2 - 0,5091x$.
Derivaatat ovat $5,96$ ja $12,42$ ja derivaattojen erotus $6,46$. Juoksunopeus kasvoi välillä $[1 \text{ s}, 7 \text{ s}]$ yhteensä $6,46$ m/s.

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

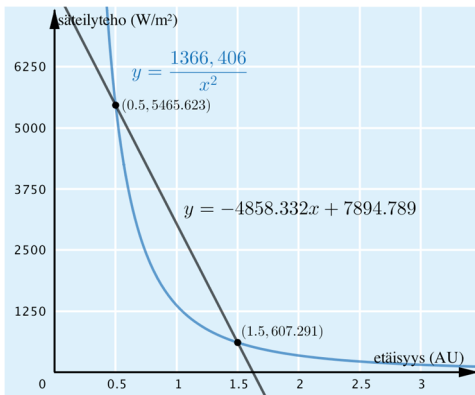
144. a) Sovitetaan aineistoon muotoa $f(x) = a \frac{1}{x^2}$ oleva funktio.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = \frac{1366,406}{x^2}$.

Vastaus: $f(x) = \frac{1366,406}{x^2}$

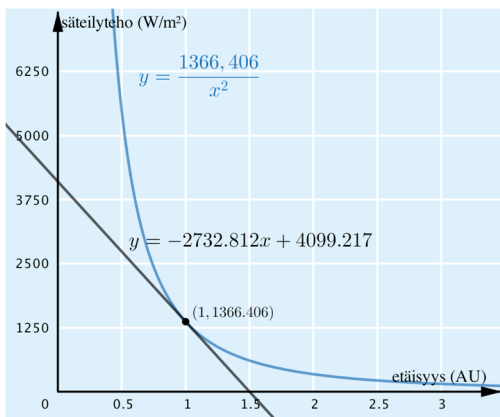
- b) Piirretään funktion f kuvaajalle sekantti niiden pisteiden kautta, joiden x -koordinaatit ovat 0,5 ja 1,5.



Sekantin kulmakerroin on $-4858,332$, joten säteilyteho vähenee keskimäärin $4858,332 \text{ W/m}^2 \approx 4900 \text{ W/m}^2$ yhden AU:n etäisyyttä kohti.

Vastaus: 4900 W/m^2 yhden AU:n etäisyyttä kohti

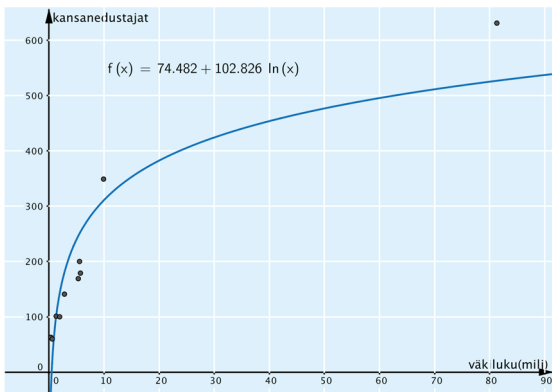
c) Piirretään funktion f kuvaajalle tangenti kohtaan $x = 1$.



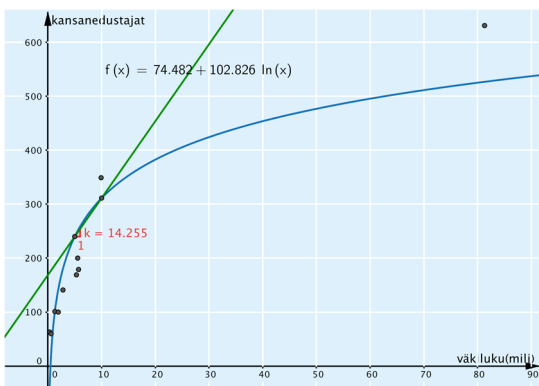
Tangentin kulmakerroin on $-2732,812$, joten funktion f derivaatta kohdassa $x = 1$ on $-2732,812$. Säteilyn voimakkuus vähenee siis Maan kohdalla $2732,812 \approx 2700 \text{ W/m}^2$ yhden AU:n etäisyyttä kohti.

Vastaus: 2700 W/m^2 yhden AU:n etäisyyttä kohti

145. Kopioidaan taulukko sopivaan ohjelmaan ja sovitetaan aineistoon logaritminen funktio.

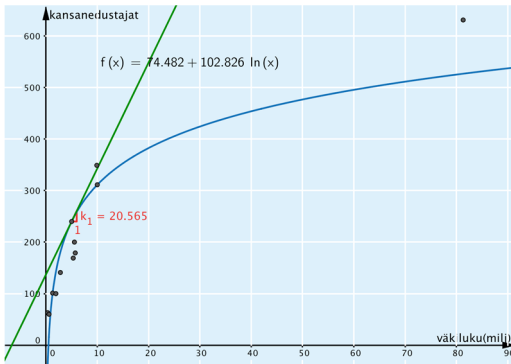


Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 74,482 + 102,826 \ln x$.
Piirretään käyrälle sekantti, joka kulkee kohtien $x = 5$ ja $x = 10$ kautta, ja määritetään sekantin kulmakerroin.



Sekantin kulmakerroin on 14,225, joten kansanedustajien määrä kasvaa noin 14 kansanedustajalla miljoonan asukkaan kasvua kohti.

Piirretään käyrälle tangentti kohtaan $x = 5$, ja määritetään tangentin kulmakerroin.



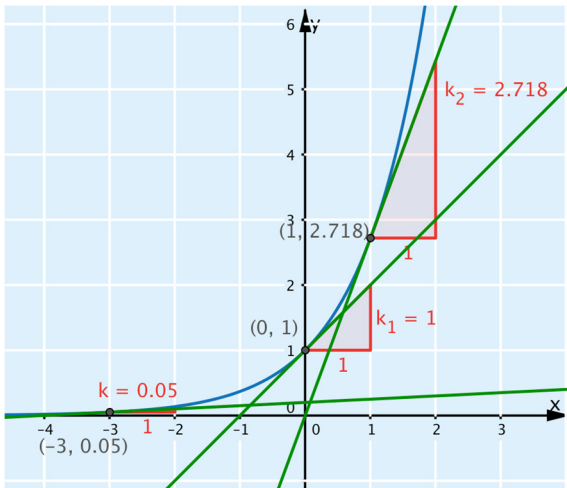
Tangentin kulmakerroin on 20,565, joten kansanedustajien määrän kasvunopeus on noin 21 kansanedustajaa/miljoonaa asukasta.

Vastaus: $f(x) = 74,482 + 102,826 \ln x$, 14 kansanedustajaa, 21 kansanedustajaa miljoonaa asukasta kohti

146. Piirretään funktion $f(x) = ex$ kuvaaja ja sille tangentteja eri kohtiin. Määritetään tangentin kulmakertoimet.

Taulukoidaan funktion arvoja ja derivaattoja muutamissa kohdissa.

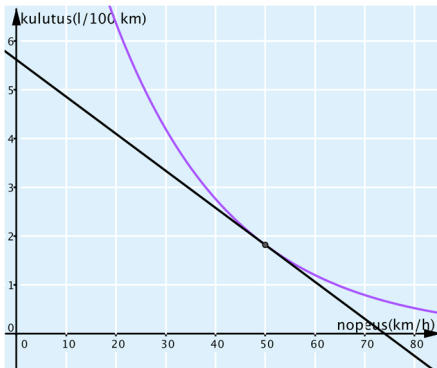
	$x = -3$	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Funktion arvo	0,05	0,135	0,368	1	2,718	7,389	20,086
Derivaatta	0,05	0,135	0,368	1	2,718	7,389	20,086



Kuvaan on merkitty pisteet, joiden x -koordinaatit ovat -3 , 0 ja 1 sekä kyseisiin kohtiin piirretty tangentit ja niiden kulmakertoimet. Huomataan, että pisteen y -koordinaatti eli funktion arvo on sama kuin pisteeseen piirretyn tangentin kulmakeroon.

Vastaus: Funktion arvot ja derivaatat näyttäisivät olevan yhtä suuria.

147. Koska derivaatta on negatiivinen kohdassa $x = 50$ (km/h), funktion kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva suora. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla.



- a) Funktion f derivaatta kohdassa $x = 50$ on negatiivinen, eli kuvaajalle kohtaan $x = 50$ piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen. Lyhyellä matkalla funktion kuvaaja kulkee likimain tangenttia pitkin. Koska tangentti on laskeva suora, niin suoran pisteen x -koordinaatin kasvaessa y -koordinaatti pienenee. Autoilijan kasvattaessa nopeutta hieman x -koordinaatti kasvaa, joten polttoaineen kulutus alenee.

Vastaus: vähenee

- b) Funktion f derivaatta kohdassa $x = 50$ on negatiivinen, eli kuvaajalle kohtaan $x = 50$ piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen. Lyhyellä matkalla funktion kuvaaja kulkee likimain tangenttia pitkin. Koska tangentti on laskeva suora, niin suoran pisteen x -koordinaatin pienessä y -koordinaatti kasvaa. Autoilijan alentaessa nopeutta hieman x -koordinaatti pienenee, joten polttoaineen kulutus kasvaa.

Vastaus: kasvaa

- 148.** a) Funktio f ilmaisee kahvikupillisesta saadun myyntivoiton, kun muuttujana on kahvikupillisen hinta x euroina. Funktion derivaatta kuvaa kahvikupillisesta saadun myyntivoiton muutosta.

Kun $x = 3$, on kahvikupillisen hinta 3 €. Myyntivoitto saadaan, kun myyntituloista vähennetään menot. Menot yhtä kahvikupillista kohden eivät muutu hinnan noustessa, joten mitä suuremmaksi kahvikupin myyntihinta kasvaa, sitä enemmän myyntivoittoa yhdestä kahvikupillisesta saadaan.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis positiivinen.

Vastaus: positiivinen

- b) Funktio f ilmaisee kahvilassa myytyjen kahvikupillisten määrää, kun muuttujana on kahvikupillisen hinta x euroina. Funktion derivaatta kuvaa myytyjen kahvikupillisten määrän muutosta.

Kun $x = 3$, kahvikupillisen hinta on 3 €. Yleensä tuotteen hinnan noustessa tuotetta myydään vähemmän kuin ennen. Myyntimäärä siis vähenee tuotteen hinnan noustessa.

Funktion derivaatta kohdassa $x = 3$ on siis negatiivinen.

Vastaus: negatiivinen

149. Koska valaistusvoimakkuus y on kääntäen verrannollinen etäisyyden x neliöön, voidaan merkitä $y = \frac{k}{x^2}$, jossa k on vakio.

Ratkaistaan vakio k sekä lampulle A että lampulle B.

Lamppu A:

Koska valaistusvoimakkuus on 100 lx, kun etäisyys lampusta on 1 m,

saadaan yhtälö $100 = \frac{k}{1^2}$, josta vakioksi k saadaan $k = 100$. Siis lampulle

A on voimassa $y = \frac{100}{x^2}$, jossa x on etäisyys lampusta A.

Lamppu B:

Koska valaistusvoimakkuus on 200 lx, kun etäisyys lampusta on 1 m,

saadaan yhtälö $200 = \frac{k}{1^2}$, josta vakioksi k saadaan $k = 200$. Siis lampulle

B on voimassa $y = \frac{200}{x^2}$, jossa x on etäisyys lampusta B.

Merkitään kirjaimella x etäisyyttä metreinä lampusta A. Lamput ovat 10 metrin etäisyydellä toisistaan, joten etäisyys metreinä lampusta B merkitään silloin $10 - x$.

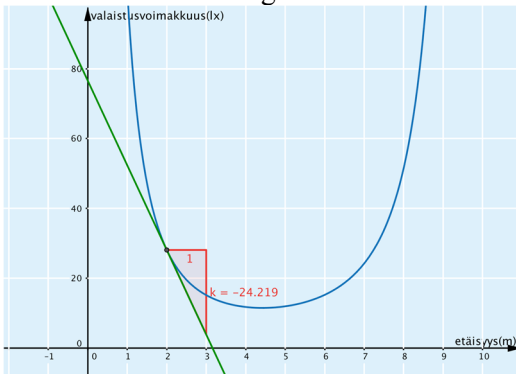
Lampun A aiheuttama valaistusvoimakkuus noudattaa lauseketta $y = \frac{100}{x^2}$

ja lampun B lauseketta $y = \frac{200}{(10 - x)^2}$. Lamppujen yhteinen

valaistusvoimakkuus noudattaa siis funktiota $f(x) = \frac{100}{x^2} + \frac{200}{(10 - x)^2}$,

jossa x on etäisyys lampusta A.

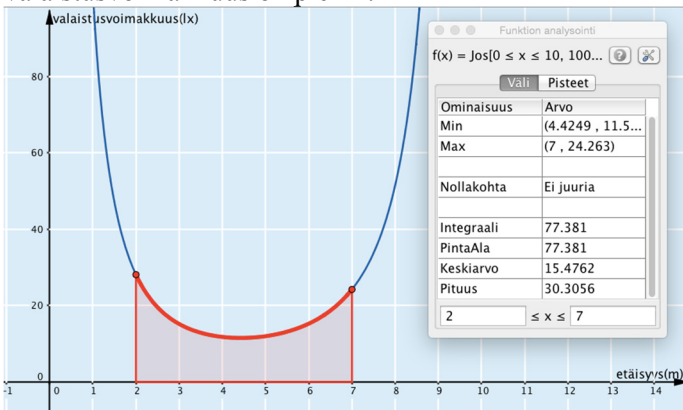
- a) Piirretään funktion f kuvaaja välille $[0, 10]$ ja sille tangentti kohtaan $x = 2$. Määritetään tangentin kulmakerroin.



Kulmakerroin on $k = -24,219$, joten valaistusvoimakkuus pienenee kahden metrin etäisyydellä lampusta A nopeudella 24,2 lx/m.

Vastaus: 24,2 lx/m

- b) Määritetään funktion analysointi-toiminnolla kohta, jossa valaistusvoimakkuus on pienin.



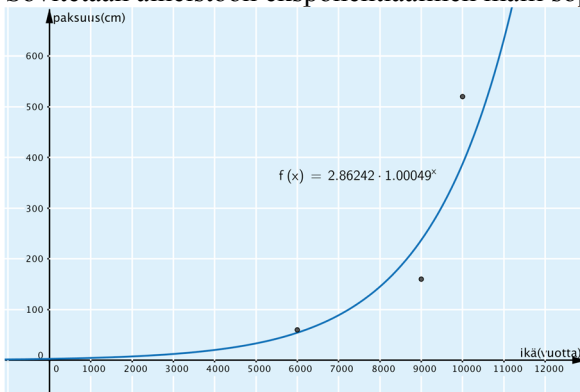
Valaistusvoimakkuuden pienin arvo on kohdassa $x = 4,424\dots$.
Etäisyys lampusta B on tällöin $10 \text{ m} - 4,424\dots \text{ m} = 5,575\dots \text{ m}$.

Henkilö pääsee noin 5,6 metrin päähän lampusta B.

Vastaus: 5,6 m:n päähän

ALOITUSAUKEAMAAN LIITTYVIÄ TEHTÄVIÄ

1. Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli sopivalla ohjelmalla.

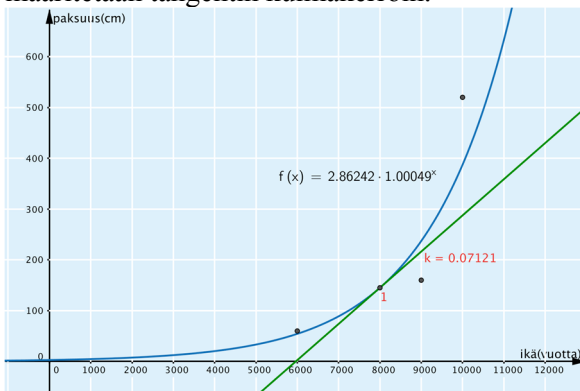


Eksponentiaalisiksi malliksi saadaan $f(x) = 2,86242 \cdot 1,00049x$.

Vastaus: $f(x) = 2,86242 \cdot 1,00049x$

2. Lampi on 10 000 vuotta vanha, joten 2000 vuotta sitten sen ikä oli $10\,000 - 2000 = 8000$ vuotta.

Piirretään tehtävässä 1 saadulle funktiolle tangentti kohtaan $x = 8000$ ja määritetään tangentin kulmakerroin.



Tangentin kulmakertoimeksi saadaan $k = 0,07121$.

Pohjasedimentin paksuus kasvoi siis 2000 vuotta sitten nopeudella $0,07121 \text{ cm} = 0,7121 \text{ mm} \approx 0,7 \text{ mm}$ vuodessa.

Vastaus: 0,7 mm:n vuosinopeudella