

t. 222, s. 43

$$g(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -2x(x^2 + 1)^{-1}, x \in \mathbb{R}$$

Sisäfunktio $s(x) = x^2 + 1$, $s'(x) = 2x$

Ulkofunktio $u(x) = x^{-1}$, $U(x) = \ln|x| + C$

$$G(x) = \int -2x(x^2 + 1)^{-1} dx = -\ln \underbrace{|x^2 + 1|}_{> 0} + C = -\ln(x^2 + 1) + C, x \in \mathbb{R}$$

Integraalifunktion kuvaajalla $y = G(x)$ on tangenttina suora $x + y + \ln 2 = 0$.

Tangentin yhtälö y :n suhteen ratkaistussa muodossa on $y = -x - \ln 2$, joten tangentin kulmakerroin on $k = -1$.

Toisaalta tangentin kulmakerroin on funktion $G(x)$ derivaatan $G'(x) = g(x)$ arvo sivuamispisteessä.

Ratkaistaan sivuamispisteen x -koordinaatti yhtälöstä $g(x) = -1$.

$$g(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2 + 1} = 1 \quad \left| \cdot x^2 + 1 \quad (\neq 0) \right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1$$

Sivuamispisteen y -koordinaatti on $y = -1 - \ln 2$

Sivuamispiste on myös käyrällä $y = G(x)$, joten on oltava $G(1) = -1 - \ln 2$

Ratkaistaan tästä yhtälöstä C :

$$G(1) = -\ln(1^2 + 1) + C = -1 - \ln 2$$

$$-\ln 2 + C = -1 - \ln 2$$

$$C = -1$$

V: Kysytty integraalifunktio on $G(x) = -\ln(x^2 + 1) - 1$

