

Esimerkkitehtävä:

Paraabelin $y = 6x - x^2$ ja x -akselin rajaama alue pyörähtää y -akselin ympäri. Laske muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus.

Paraabeli leikkaa x -akselin kohdissa $x = 0$ ja $x = 6$.

Paraabelin huippu on pisteessä $(3, 9)$.

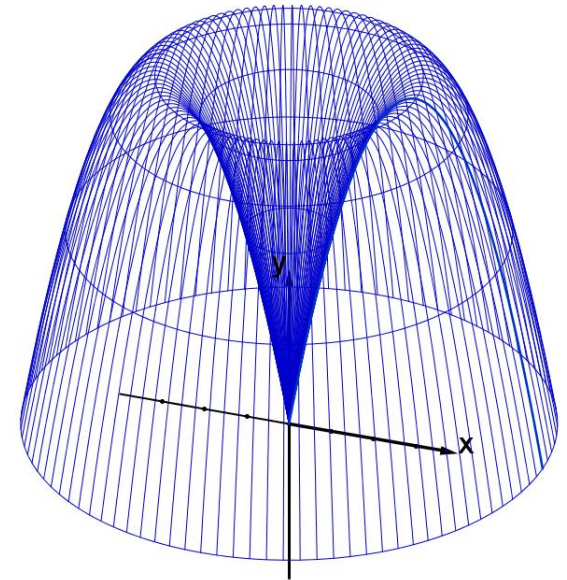
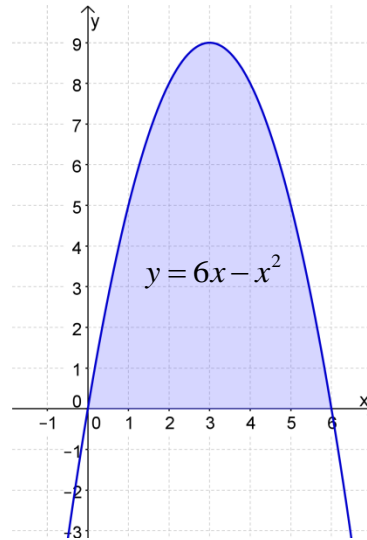
Integroidaan y -akselin suuntaisesti, joten ratkaistaan x :

$$y = 6x - x^2$$

$$x^2 - 6x + y = 0$$

Ratkaisuksi saadaan (laskinohjelmistolla tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla):

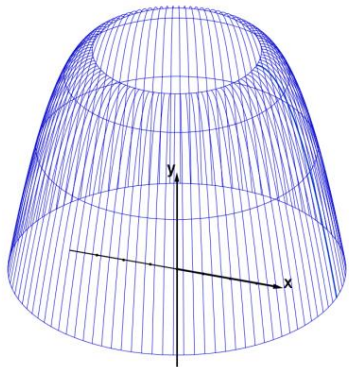
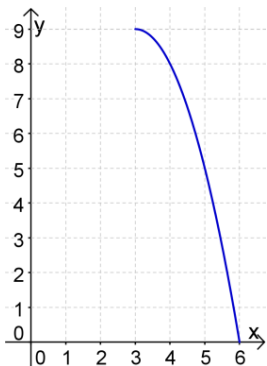
$$x = 3 \pm \sqrt{9 - y}, \quad 0 \leq y \leq 9$$



Huom! y :n lausekkeena paraabelin muodostaa kaksi eri (juuri)funktiota, jotka pitää siis käsitellä erikseen.

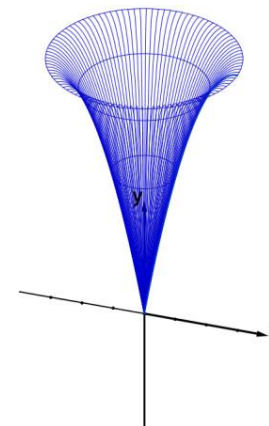
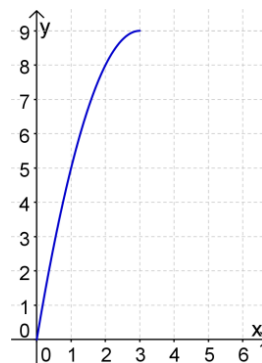
Paraabelin oikea haara ja vastaava pyörähdyskappale:

$$x = 3 + \sqrt{9 - y}$$



Paraabelin vasen haara ja vastaava pyörähdyskappale:

$$x = 3 + \sqrt{9 - y}$$



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan vähentämällä oikean haaran muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuudesta vasemman haaran muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus. Integroimisväli on $[0, 9]$ eli x -akselilta paraabelin huippuun.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^9 (3 + \sqrt{9-y})^2 dy - \pi \int_0^9 (3 - \sqrt{9-y})^2 dy \\
&= \pi \int_0^9 \left((3 + \sqrt{9-y})^2 - (3 - \sqrt{9-y})^2 \right) dy \\
&= \pi \int_0^9 \left((9 + 6\sqrt{9-y} + 9 - y) - (9 - 6\sqrt{9-y} + 9 - y) \right) dy \\
&= \pi \int_0^9 12\sqrt{9-y} dy = 12\pi \int_0^9 (9-y)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= -12\pi \int_0^9 -(9-y)^{\frac{1}{2}} dy \\
&= -12\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (9-y)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^9 = -12\pi \left[\frac{2}{3} (9-y)^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 \\
V &= -8\pi \left(0^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right) = 216\pi \quad (\approx 679)
\end{aligned}$$

Koska rajat on samat, voidaan yhdistää integraalit yhdeksi.

Poistetaan sulut (binomin neliön kaavalla)

Sievennetään ja muutetaan funktion potenssiksi.

Muokataan sisäfunktion $f(y) = 9 - y$ derivaatta -1 potenssin eteen. (Onnistuu, koska derivaatta on vakio.)

Käytetään funktion potenssin integroimiskaavaa: (tässä $r = 1/2$, ja muuttujana y)

$$\int f'(x) f(x)^r dx = \frac{1}{r+1} f(x)^{r+1} + C, \quad r \neq -1$$

V: Pyörähdyskappaleen tilavuus on 216π (tilavuusyksikköä)