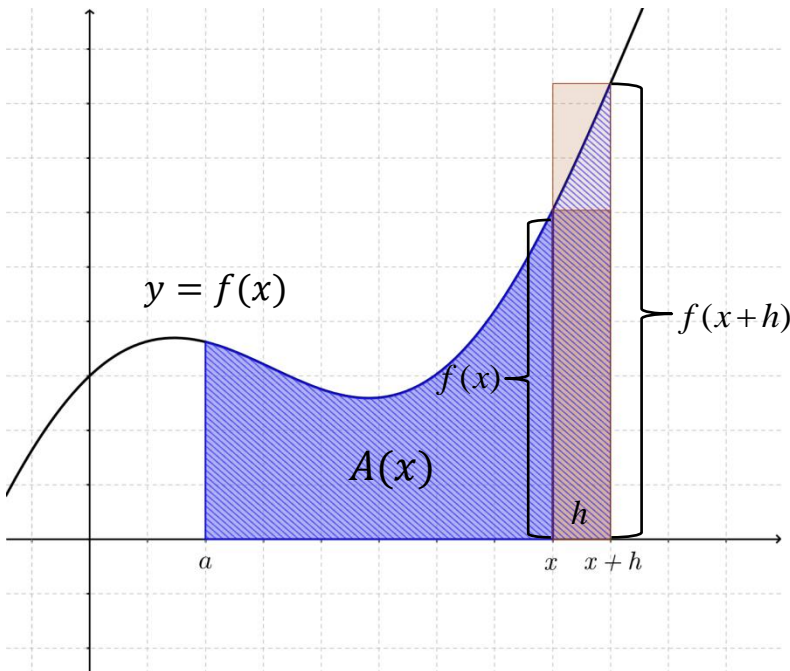


Pinta-alafunktion derivaattalause

Olkoon f jatkuva funktio ja $A(x)$ pinta-alafunktio, joka kertoo käyrän ja x – akselin rajaaman pinta-alan jostain kiinteästä alarajasta a pisteeseen x .

Perustellaan, että $A'(x) = f(x)$:

Erytistapaus: f on aidosti kasvava pisteen x ympäristössä. (Aidosti vähenevälle funktiolle perustelu voidaan tehdä vastaavalla tavalla.)



Kuvan oikean reunan kaistaleen pinta-ala on $A(x + h) - A(x)$. Tätä pinta-alaa voidaan myös arvioida kahden suorakaiteen avulla:

$$h \cdot f(x) \leq A(x + h) - A(x) \leq h \cdot f(x + h) \quad | :h$$

$$f(x) \leq \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leq f(x + h)$$

Kun kaistaleen leveys h lähestyy nollaa, niin erotusosamäärä lähestyy pinta-alafunktion derivaattaa:

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \rightarrow A'(x)$$

Lisäksi $f(x + h) \rightarrow f(x)$, kun $h \rightarrow 0$. (koska f on jatkuva.)

Erotusosamäärä on näiden toisiaan lähestyvien funktion arvojen välissä, joten

$$A'(x) = f(x).$$

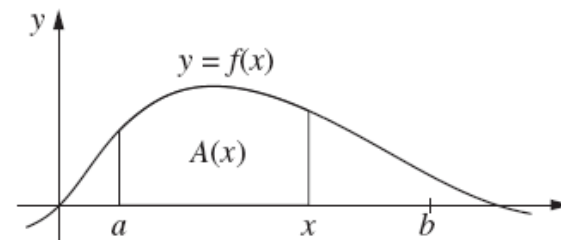
Näin saatiin tärkeä tulos:

Pinta-alafunktion derivaattalause

Välillä $[a, b]$ jokaisessa pisteessä on

$$A'(x) = f(x),$$

eli pinta-alafunktio $A(x)$ on välillä $[a, b]$ funktion $f(x)$ integraalifunktio.



Oletus: Funktio f on välillä $[a, b]$ jatkuva ja epänegatiivinen.

Pinta-alalause

Oletetaan, että funktio f on välillä $[a, b]$ jatkuva ja epänegatiivinen. Tällöin funktion f kuvaajan ja x -akselin välillä $[a, b]$ rajaaman alueen pinta-ala on

$$A = F(b) - F(a),$$

missä F on funktion f (mikä tahansa) integraalifunktio.

Koska mikä tahansa funktion f integraalifunktio F käy, niin valitaan integroimisvakioksi $C = 0$. (Joka tapauksessa C häviää vähennyslaskussa.)

Todistus:

Derivaattalauseen perusteella $A(x) = F(x) + C$, missä F on funktion f jokin integraalifunktio.

Erityisesti $A(a) = F(a) + C = 0$, josta saadaan $C = -F(a)$.

Siis $A(x) = F(x) - F(a)$ ja $A = A(b) = F(b) - F(a)$.