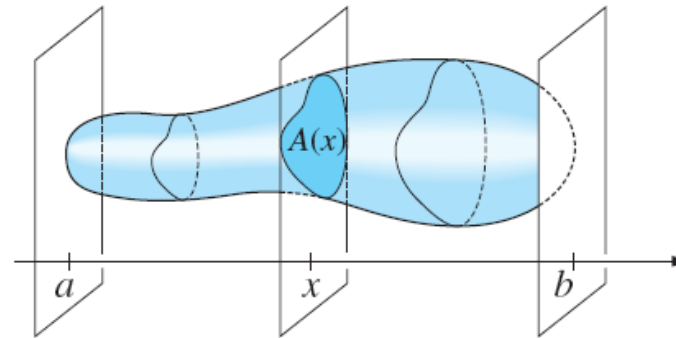


Tilavuusintegraali

- Kappaleen tilavuus voidaan laskea integraalina, jos kappaleen poikkileikkaus saadaan esitettyä integroimismuuttujan (x :n) lausekkeena.

$$V = \int_a^b A(x) dx$$



- $A(x)$ on x –akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-ala kohdassa x .

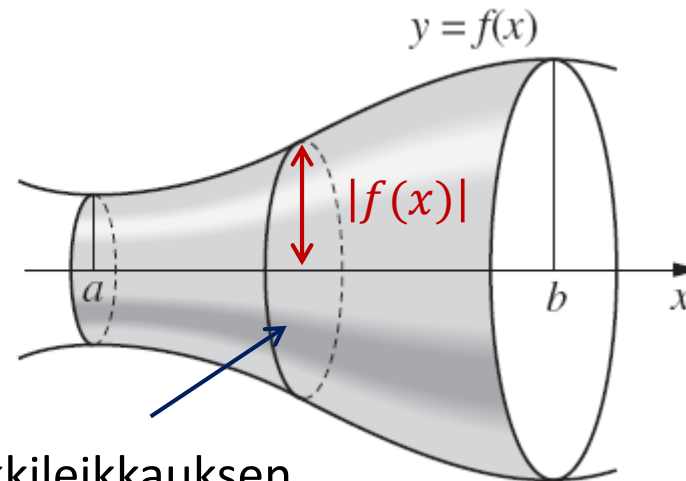
Kappaleen voidaan ajatella koostuvan ohuista siivuista (lieriöistä), joiden pohjan pinta-ala on $A(x)$ ja korkeus (pohjien välimatka) dx . (Differentiali dx lähestyy nollaa, jolloin saadaan tarkka tilavuus.)

Pyörähdyskappaleen tilavuus

1. Käyrä $y = f(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri:

Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kappaleen tilavuuden kaavasta (poikkileikkaus on nyt ympyrä, jonka säde $r = |f(x)|$).

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$



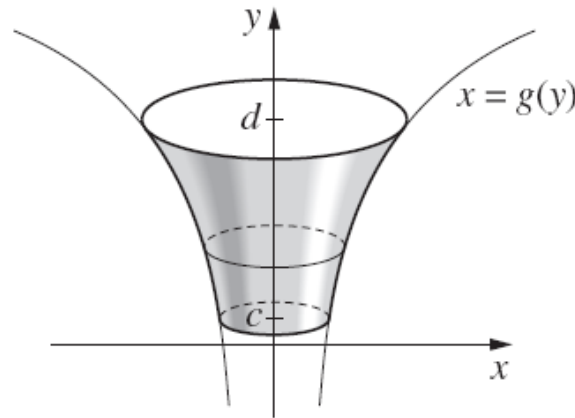
Poikkileikkauksen
pinta-ala

$$A(x) = \pi |f(x)|^2 = \pi f(x)^2$$

2. Käyrä $x = g(y)$ pyörähtää y –akselin ympäri.

Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan vastaavalla kaavalla:

$$V = \pi \int_c^d g(y)^2 dy$$



Jos tehtävässä on ilmoitettu käyrän yhtälö muodossa $y = f(x)$, niin yhtälöstä pitää ensin ratkaista x muuttujan y lausekkeena eli muodossa $x = g(y)$.

Myös integroimisrajat pitää laskea y :n suhteen.

t. 519, s. 120 (K2006/9)

Kun käyrä $y = 2 \ln(x + 1)$, $0 \leq x \leq e - 1$ pyörähtää y -akselin ympäri, integroimismuuttujan pitää olla y .

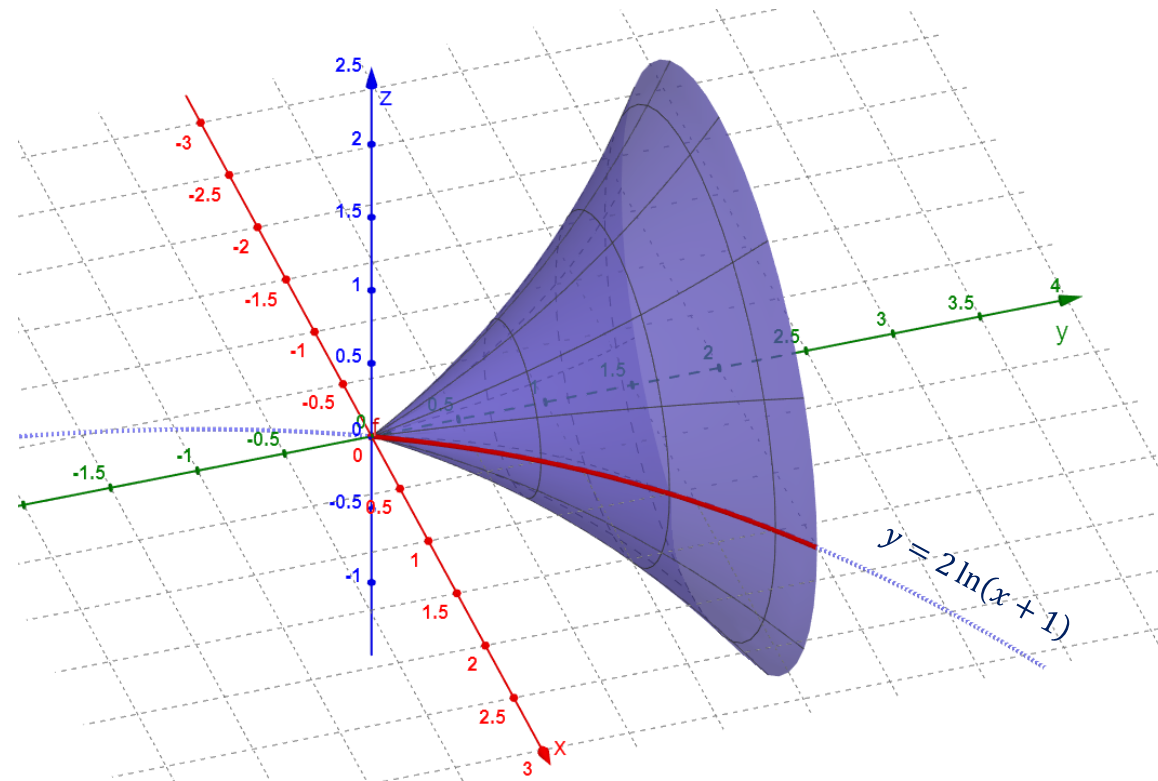
Ratkaistaan käyrän yhtälöstä x :

$$y = 2 \ln(x + 1)$$

$$\frac{y}{2} = \ln(x + 1) \quad | e^{\quad}$$

$$e^{\frac{y}{2}} = x + 1$$

$$x = e^{\frac{y}{2}} - 1$$



Myös integroimisrajat pitää laskea y :n suhteen:

$$x = 0: \quad y = 2 \ln(0 + 1) = 0$$

$$x = e - 1: \quad y = 2 \ln(e - 1 + 1) = 2$$

Tilavuus saadaan integraalista:

$$V = \pi \int_0^2 \left(e^{\frac{y}{2}} - 1 \right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 \left(e^y - 2e^{\frac{y}{2}} + 1 \right) dy$$

$$= \pi \left/ \left(e^y - 4e^{\frac{y}{2}} + y \right) \right/_0^2 = \pi(e^2 - 4e + 2 - (e^0 - 4e^0 + 0))$$

$$= \pi(e^2 - 4e + 5) \approx 4,76 \text{ (til. yks.)}$$

