

Määrätty integraali

- Olkoon funktio f määritelty ja jatkuva välillä $[a, b]$
- Jos F on funktion f jokin integraalifunktio, niin erotus $F(b) - F(a)$ on funktion f *määrätty integraali* a :sta b :hen.
- Määrätylle integraalille käytetään merkintää

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

a = alaraja

b = yläraja

(yleensä siis $b > a$, mutta tämä ei ole välttämätöntä)

- Määrätyn integraalin laskeminen:
 1. Määritetään jokin funktion f integraalifunktio F . (Käytännössä se integraalifunktio, jossa vakio $C = 0$.)
 2. Muodostetaan ja lasketaan erotus $F(b) - F(a)$ käyttämällä *sijoitusmerkintää*

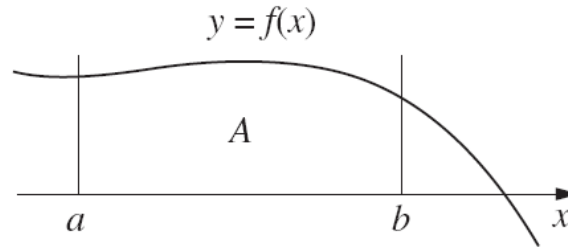
$$\int_a^b f(x)dx = \left/ F(x) \right/ _a^b = F(b) - F(a)$$

Määrätty integraali ja pinta-ala

- Määrätyn integraalin avulla voidaan esimerkiksi laskea jatkuvan funktion rajaamia pinta-aloja (vrt. pinta-alafunktio)

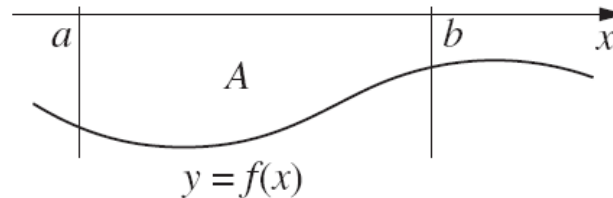
1. $f(x) \geq 0$ välillä $[a, b]$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



2. $f(x) < 0$ välillä $[a, b]$

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Olkoon f ja g ovat välillä $[a, b]$ jatkuvia funktioita. Lauseiden todistukset suoraan määritelmästä (ks. oppikirja 72-73, 76)

Lineaarisuus:
$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Samat säännöt siis pätee kuin "tavallisillekin" integraaleille.

Integroimisvälin jakaminen osiin:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad a < c < b$$

Rajojen vaihto:
$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Tyhjä väli:
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

t. 323, s.77

$$f(x) = \cos 2x$$

Yksikköympyrän (ja kuvaajan) perusteella

$$f(x) \geq 0 \text{ välillä } \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

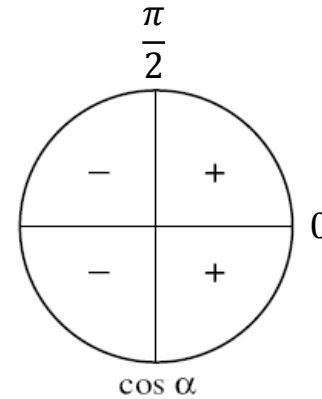
Kysytty pinta-ala saadaan siis määrättyinä integraalina

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx$$

$$= \left/ \frac{1}{2} \sin 2x \right|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \overbrace{\sin(2 \cdot 0)}^0$$

$$= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



$$\cos 2 \cdot 0 = \cos 0 = 1$$

$$\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$



Esimerkki: Laske $\int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x) dx$.

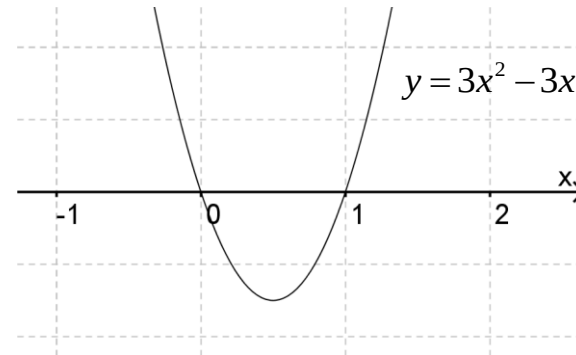
Esitetään lauseke $|3x^2 - 3x| + x$ ilman itseisarvomerkintää.

Itseisarvolausekkeen nollakohdat:

$$3x^2 - 3x = 3x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Kuvaaja:



Siis

$$|3x^2 - 3x| + x = \begin{cases} -(3x^2 - 3x) + x & , \text{ kun } 0 < x < 1 \\ (3x^2 - 3x) + x & , \text{ kun } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -3x^2 + 4x & , \text{ kun } 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 2x & , \text{ kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Nyt määrätty integraali voidaan laskea osissa:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (|3x^2 - 3x| + x) dx &= \int_0^1 (-3x^2 + 4x) dx + \int_1^3 (3x^2 - 2x) dx \\ &= \int_0^1 (-x^3 + 2x^2) + \int_1^3 (x^3 - x^2) \\ &= (-1^3 + 2 \cdot 1^2) + (3^3 - 3^2) - (1^3 - 1^2) \\ &= -1 + 2 + 27 - 9 = \underline{\underline{19}} \end{aligned}$$

Tarkistus kuvaajasta:

