4. Polynomit 12 p.

Polynomien $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$ ja $g(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$ kuvaajat leikkaavat toisensa kolmessa pisteessä $(2,0)$, $(-2,0)$ ja (x_0, y_0), missä $-2 < x_0 < 0$.

1. Määritä leikkauspiste (x_0, y_0). **(4 p.)**

2. Laske polynomien kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[0,2]$. **(8 p.)**

1. Kolmannen leikkauspisteen x −koordinaatti x_0 saadaan yhtälöstä $f(x_0) = g(x_0)$.

$$(x_0-2)(x_0+2)(x_0-1) = -2(x_0-2)(x_0+2)(x_0+1) \quad \Big| : (x_0-2)(x_0+2) \neq 0, \text{ koska } -2 < x_0 < 0.$$

$$(x_0-1) = -2(x_0+1)$$

$$x_0 - 1 = -2x_0 - 2$$

$$3x_0 = -1$$

$$x_0 = -\frac{1}{3}$$

Leikkauspisteen y −koordinaatti y_0 saadaan sijoittamalla x_0 jommankumman funktion lausekkeeseen:

$$y_0 = f(x_0) = (-\frac{1}{3} - 2)(-\frac{1}{3} + 2)(-\frac{1}{3} - 1)$$

$$y_0 = f(x_0) = -\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{140}{27}$$

Kysytty leikkauspiste on siis $(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{140}{27}\right)$.

Tarkistus SpeedCrunchilla:

```
f(x)=(x-2)(x+2)(x-1)

g(x)=-2(x-2)(x+2)(x+1)

f(-1/3)
= 5,18518518518518518519

g(-1/3)
= 5,18518518518518518519

140/27
= 5,18518518518518518519
```

2.

Aiemman perusteella käyrät $y = f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$ ja $y = g(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$ leikkaavat toisensa kohdissa $x = -2,\ x = -\frac{1}{3}$ ja $x = 2$.

Välillä $[0,2[$ toinen käyristä on siis ylempänä. Selvitetään testipisteellä $x = 1$ kumpi saa suurempia arvoja:

$$f(1) = (1-2)(1+2)(1-1) = 0$$

$$g(1) = -2(1-2)(1+2)(1+1) = -2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 2 = 12 > f(1)$$

Siis välillä $[0,2[$ pätee $g(x) > f(x)$ ja kun $x = 2$, niin $g(x) = f(x) = 0$.

Kuvaajien väliin välillä $[0,2]$ jäävän alueen pinta-ala A saadaan siis määrättynä integraalina

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx.$$

Sievennetään erotusta ja kerrotaan ensin polynomien lausekkeista sulkeet auki.

$$f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$f(x) = (x^2-4)(x-1) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$g(x) = -2(x-2)(x+2)(x+1)$$

$$g(x) = -2(x^2-4)(x+1) = -2(x^3 + x^2 - 4x - 4) = -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8$$

Huom. Tarkista sievennys SpeedCrunchilla!

Testaa satunnaisella luvulla (tai luvuilla) tuleeko lausekkeista sama tulos?

```
h(x)=x^3-x^2-4x+4

i(x)=-2x^3-2x^2+8x+8

h(7.34)
= 316,211304

f(7.34)
= 316,211304

i(4.28)
= -151,202304

g(4.28)
= -151,202304
```

Muodostetaan erotusfunktion lauseke:

$$g(x) - f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8 - (x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

$$= -2x^3 - 2x^2 + 8x + 8 - x^3 + x^2 + 4x - 4$$

$$= -3x^3 - x^2 + 12x + 4$$

Tämänkin voit tarkistaa SpeedCrunchilla...

j(x)=-3x^3-x^2+12x+4

j(5.89)
= -573,021507

g(5.89)-f(5.89)
= -573,021507

Kysytty pinta-ala on

$$A = \int_0^2 (-3x^3 - x^2 + 12x + 4)dx$$

$$= \Big/_{0}^{2} \left(-3 \cdot \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 6x^2 + 4x\right)$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = -\frac{3}{4} \cdot 16 - \frac{8}{3} + 24 + 8 = -12 - \frac{8}{3} + 32 = 20 - 2\frac{2}{3} = 17\frac{1}{3}$$

Tarkistetaan vielä integraalifunktioon sijoitus:

k(x)=-3/4*x^4-1/3*x^3+6x^2+4x

k(2)-k(0)
= 17,3333333333333333