

K2019/5

5. Paraabeleja pohjapiirroksessa (12 p.)

Aineisto:

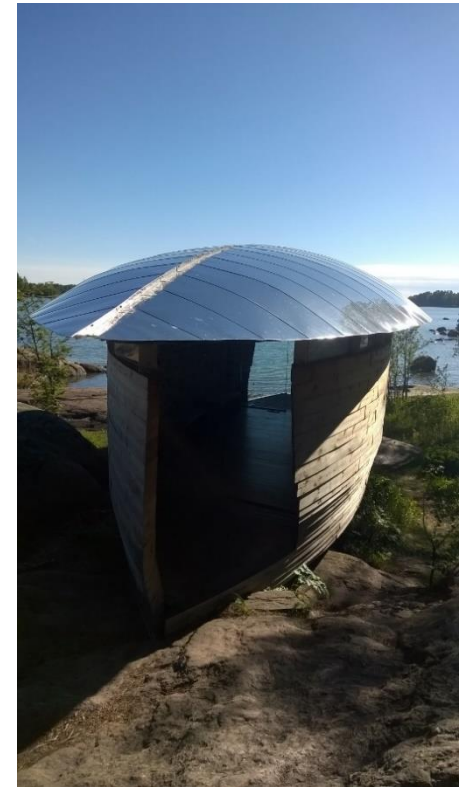
5.A Kuva: Kalevalakehto

5.B Kuva: Koordinaatistopiirros

Suomalais-amerikkalainen arkkitehtipiskelijaryhmä rakensi Helsingin Seurasaaren Kalevalakehtonimisen rakennuksen (aineisto 5.A). Tulos oli niin onnistunut, että on keskusteltu toisenkin samantapaisen rakennuksen rakennuttamisesta. Uuden rakennuksen pohjan muotoa kuvaavat vastakkaisiin suuntiin aukeavat paraabelit, kuten koordinaatistopiirroksessa (aineisto 5.B). Pohjan pituus on 10 metriä ja leveys 4 metriä.

5.1. Muodosta paraabelien yhtälöt. (6 p.)

5.2. Laske rakennuksen pohjan pinta-ala. (6 p.)



5.1

Muodostetaan paraabelien yhtälöt algebrallisesti, mutta myös sovittamalla polynomi GeoGebralla. Huomaa, että sovitustoiminto on likimääräinen menetelmä.

Paraabeli on toisen asteen funktion kuvaaja, jonka yleinen muoto on $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Tiedetään, että $c = 0$, koska paraabelit kulkevat origon kautta. Siis $y = f(x) = ax^2 + bx$.

Parametrien a ja b selvittämiseksi tarvitaan (origon lisäksi) kaksi tunnettua pistettä. Kuvan perustella nämä ovat alaspäin aukeavalla paraabelilla $(5, 2)$ ja $(10, 0)$.

Ratkaistaan parametrit yhtälöparista

$$\begin{cases} f(5) = 2 \\ f(10) = 0 \end{cases}$$

TI-Nspiren avulla:

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x$$

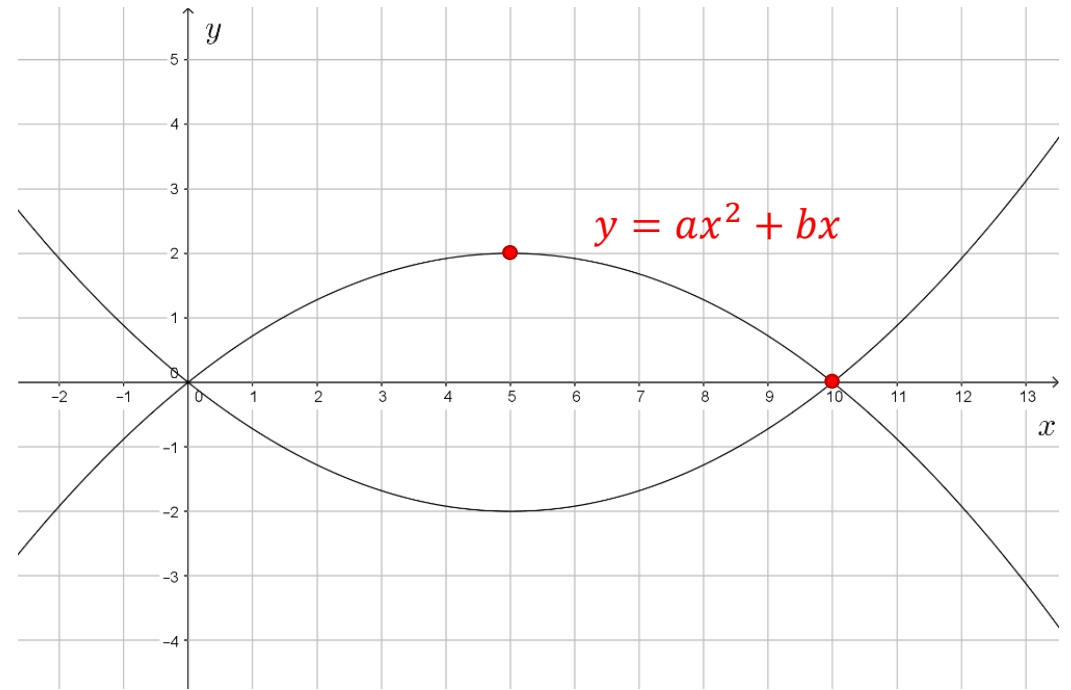
$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(10)=0 \\ f(5)=2 \end{cases}, a, b\right)$$

Valmis

$$a = -\frac{2}{25} \text{ and } b = \frac{4}{5}$$

Alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö on siis $y = f(x) = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{4}{5}x$.

Ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö on peilikuvana $y = -f(x) = \frac{2}{25}x^2 - \frac{4}{5}x$.



Paraabelin yhtälön voisi ratkaista myös hyödyntämällä nollakohtien ja tekijöiden välistä yhteyttä. Koska nollakohdat ovat 0 ja 10, niin vastaavat tekijät ovat x ja $x - 10$.

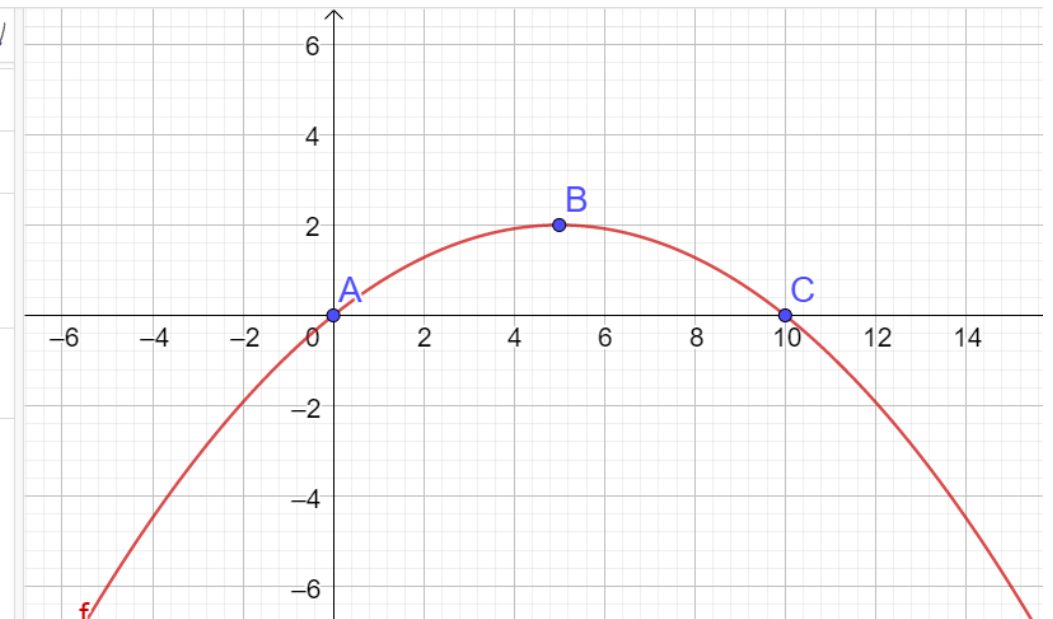
Paraabelien yhtälöt ovat tällöin muotoa $y = ax(x - 10)$. Parametri a (alaspäin aukeavalle paraabelille) saadaan sijoittamalla pisteen $(5, 2)$ koordinaatit $x = 5$ ja $y = 2$ yhtälöön:

$$2 = a \cdot 5(5 - 10) = -25a \Leftrightarrow a = -\frac{2}{25}.$$
$$\Rightarrow y = -\frac{2}{25}x(x - 10) = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{2}{25}x \cdot 10 = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{4}{5}x.$$

GeoGebran toiminnolla
”SovitaPolynomi”:

Tulos on likiarvo,
vaikkakin tässä
tapauksessa tarkka.

●	A = (0, 0)	≡
●	B = (5, 2)	⋮
●	C = (10, 0)	⋮
●	f(x) = SovitaPolynomi({A, B, C}, 2) → $-0.08x^2 + 0.8x$	⋮
+	Syöttökenttä...	



Käytä algebrallista eli (yhtälöiden tarkkaan ratkaisuun perustuvaa) menetelmää ellei toisin sanota (ja jos lähtöarvot tarkkoja).

5.2

Lasketaan rakennuksen pohjan pinta-ala A integroimalla. Aluetta rajaa yläpuolelta käyrä $y = f(x)$ ja alapuolelta $y = -f(x)$. Kun merkitään $g(x) = -f(x)$, niin

$$A = \int_0^{10} (f(x) - g(x)) dx = \frac{80}{3} \approx 27 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Tallennetaan parametreihin edellä ratkaistut arvot:

$$a := \frac{-2}{25}$$

$$\frac{-2}{25}$$

$$b := \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}$$

$f(x)$

$$\frac{4 \cdot x}{5} - \frac{2 \cdot x^2}{25}$$

Merkitään $g(x) = -f(x)$.

$$g(x) := -f(x)$$

Valmis

Lasketaan määrätty integraali laskinohjelmalla.

$$\int_0^{10} (f(x) - g(x)) dx$$

$$\frac{80}{3}$$

$$\int_0^{10} (f(x) - g(x)) dx$$

26.6666666667

(Likiarvo saadaan painamalla Ctrl+Enter)