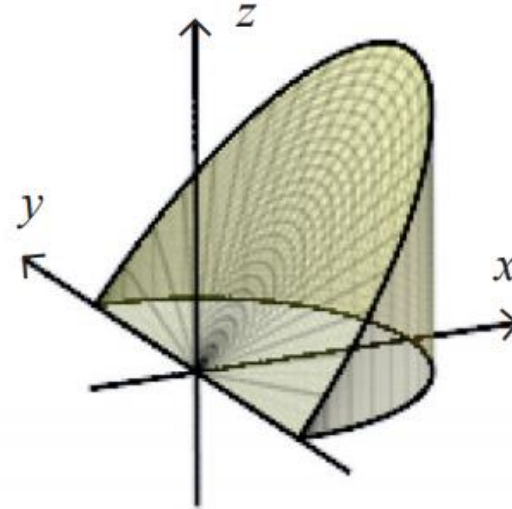


**Yo-tehtävä:
K2014/10**

Juustoa myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa. Lieriön korkeus on h ja sen pohjan säde on r . Juusto leikataan ensin pystysuorassa suunnassa kahteen yhtä suureen osaan. Toisesta puolikkaasta leikataan vinosti kuvion osoittama pienempi pala, jonka korkeus on h . Laske tämän juustonpalan tilavuus integroimalla.



<<http://www.valio.fi/tuotteet/juustot/valio-oltermanni>>. Luettu 12.3.2013.

Mallikuvion tekeminen GeoGebran 3D-tilassa:

Mallinnetaan tilannetta käyttämällä sopivia säteen r ja korkeuden h arvoja. Laskussa näitä arvoja ei saa itse valita, mutta tehdään mallikuvaa varten lieriö, jossa esimerkiksi $r = 3$ ja $h = 5$.

The screenshot displays the GeoGebra 3D workspace. On the left, the 'Alkuperäiset' (Originals) list shows the construction of a cylinder (Lieriö) using two points, A and B. Point A is defined as the intersection of the y-axis and x-axis, with coordinates (0, 0, 0). Point B is defined as a point on the z-axis, with coordinates (0, 0, 5). The cylinder is shown in a 3D coordinate system with x, y, and z axes. The cylinder is yellow and has a height of 5 units along the z-axis. The top surface of the cylinder is at z=5, and the bottom surface is at z=0. The radius of the cylinder is 3 units. The interface includes a toolbar at the top with various geometric tools, a search bar, and a settings panel on the right.

Object	Definition	Coordinates
Lieriö	$a : \text{Lieriö}(A, B, 3)$	$\rightarrow 141.37$
Piste	$A = \text{Leikkauspiste}(y\text{Akseli}, x\text{Akseli})$	$\rightarrow (0, 0, 0)$
Piste	$B = \text{Piste}(z\text{Akseli})$	$\rightarrow (0, 0, 5)$
	Syöttökenttä...	

Leikataan juustosta siivu tasolla, joka määräytyy pisteen $C = (3, 0, 5)$ ja y –akselin avulla. Pisteiden koordinaatit kannattaa kirjoittaa syöttökenttään.

The screenshot shows a 3D geometry software interface. On the left, a list of objects is displayed:

- Lieriö**
 - a : Lieriö(A, B, 3)
→ 141.37
- Piste**
 - A = Leikkauspiste(yAkseli, xAkseli)
→ (0, 0, 0)
 - B = Piste(zAkseli)
→ (0, 0, 5)
 - C = (3, 0, 5)
- Taso**
 - p : Taso(C, yAkseli)
→ $5x - 3z = 0$
- Syöttökenttä...

The 3D view on the right shows a yellow cylinder with a radius of 3, centered on the z-axis. A blue plane is shown intersecting the cylinder. The intersection curve is highlighted in green. The point C is marked on the cylinder's top edge. The coordinate system has x, y, and z axes. The x-axis is red, the y-axis is green, and the z-axis is blue. The x-axis is labeled from -7 to 5, and the z-axis is labeled from 0 to 5.

Siivun reuna saadaan kahden pinnan leikkauksena:

The screenshot shows a 3D software interface with a toolbar at the top. The 'Kahden pinnan leikkaus' (Intersection of two surfaces) tool is highlighted with a red circle. The command palette on the left lists the following objects and their equations:

- e : LeikkausPolku(p, a)**
→ $X = (0, 0, 0) + (-3 \cos(t), 3 \sin(t), 0)$
- Lieriö**
a : Lieriö(A, B, 3)
→ 141.37
- Piste**
 - A = Leikkauspiste(yAkseli, xAkseli)
→ (0, 0, 0)
 - B = Piste(zAkseli)
→ (0, 0, 5)
 - C = (3, 0, 5)
- Taso**
p : Taso(C, yAkseli)
→ $5x - 3z = 0$
- + Syöttökenttä...

The 3D view shows a yellow cylinder centered at the origin with a radius of 3 and height of 5. A light blue plane passes through the point (3, 0, 5) and is parallel to the y-axis. The intersection of the cylinder and the plane is shown as a blue curve. The coordinate system has x, y, and z axes. The x-axis is red, the y-axis is green, and the z-axis is blue. The x-axis is labeled from -7 to 5, and the z-axis is labeled from 0 to 5. A point C is marked at (3, 0, 5). A dashed line connects the origin to point C. A tooltip at the bottom center reads 'Kahden pinnan leikkaus Valitse kaksi pintaa' and 'OHJE'.

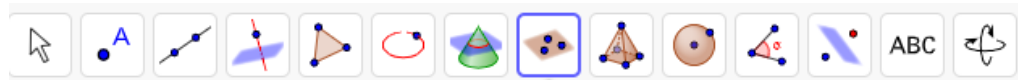
Taso kannattaa piilottaa pois näkyvistä, kun leikkauskäyrä on saatu muodostettua.

Tehdään seuraavaksi integroimissuunnassa eli y –akselilla liikkuva piste liukusäätimellä. (Myös ”Piste objektilla” toimintoa voi käyttää, mutta pistettä voi olla hankala liikuttaa kuvion sisältä.)

Kirjoittamalla syöttökenttään esim. $(0, s, 0)$ saadaan liukusäädin ja y –akselilla liikkuva piste (jos kirjain s ei ole jo muussa käytössä.) Liukusäätimen asetuksista voi valita väliksi $[-3, 3]$.

Perusominaisuudet	Liukusäädin	Väri	Paikka	Lisäasetukset
Algebra	Ohjelmointi			
Min				
-3				
Max				
3				
Animaatioaskel				

Tehdään seuraavaksi integroimissuuntaa vastaan kohtisuora taso, joka kulkee liikkuvan pisteen kautta.



Kartioleikkaus



e : LeikkausPolku(p, a)

$$\rightarrow X = (0, 0, 0) + (-3 \cos(t), 3 \sin(t), 0)$$

Lieriö



a : Lieriö(A, B, 3)

$\rightarrow 141.37$

Luku



s = -1.3



Piste

Taso



p : Taso(C, yAkseli)

$$\rightarrow 5x - 3z = 0$$

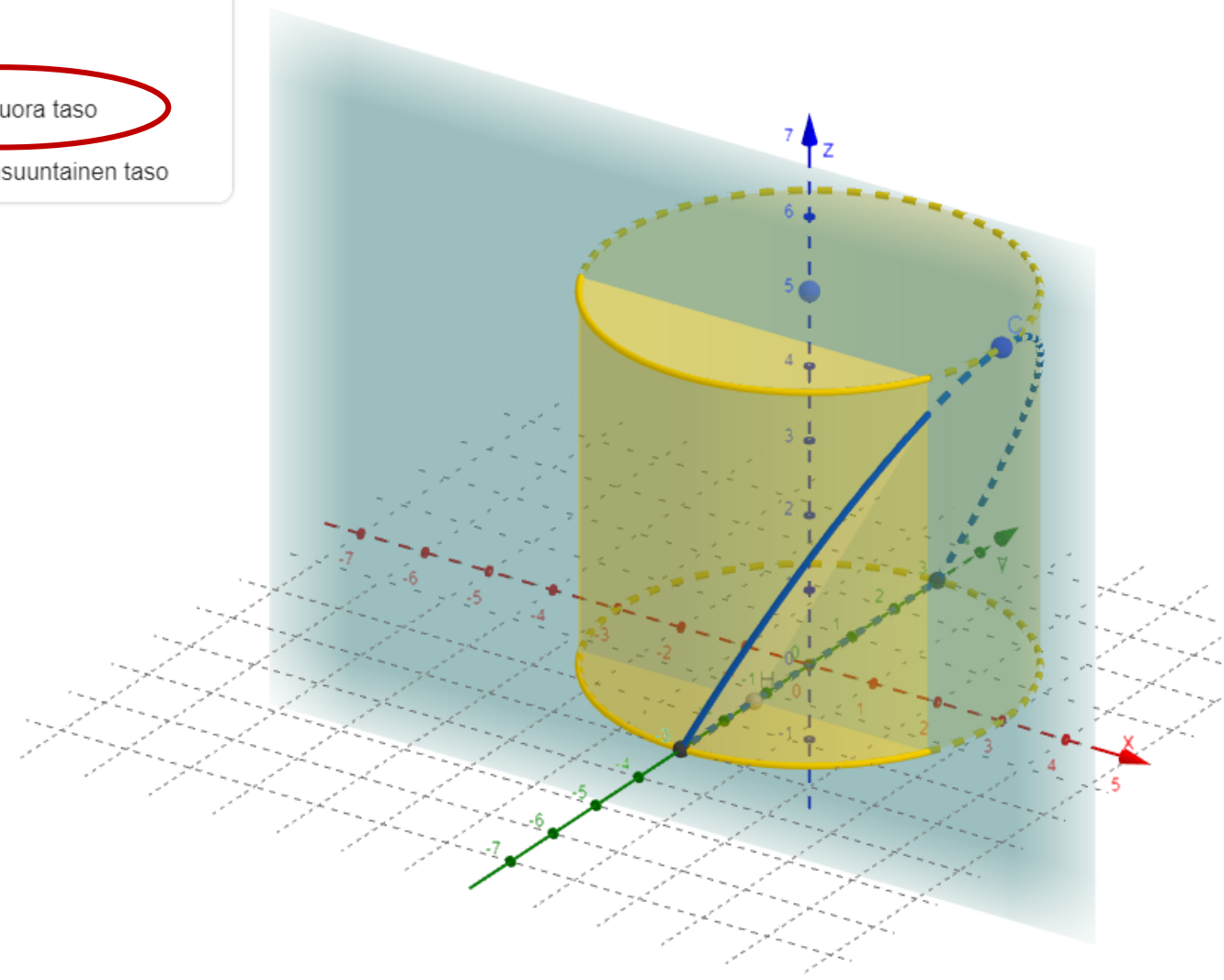


q : Normaalitaso(H, yAkseli)

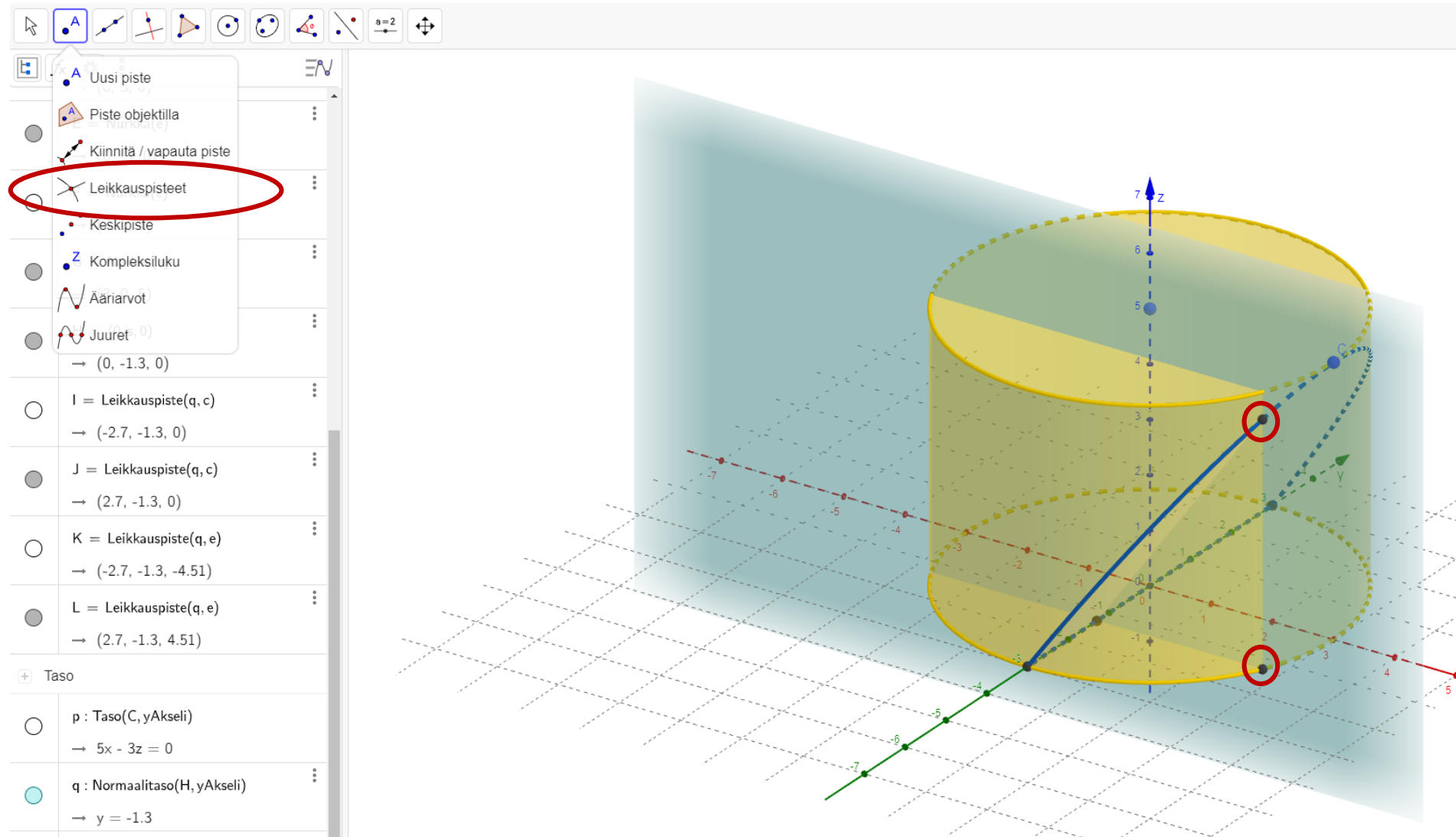
$$\rightarrow y = -1.3$$

Syöttökenttä...

- Taso kolmen pisteen kautta
- Taso
- Kohtisuora taso**
- Yhdensuuntainen taso



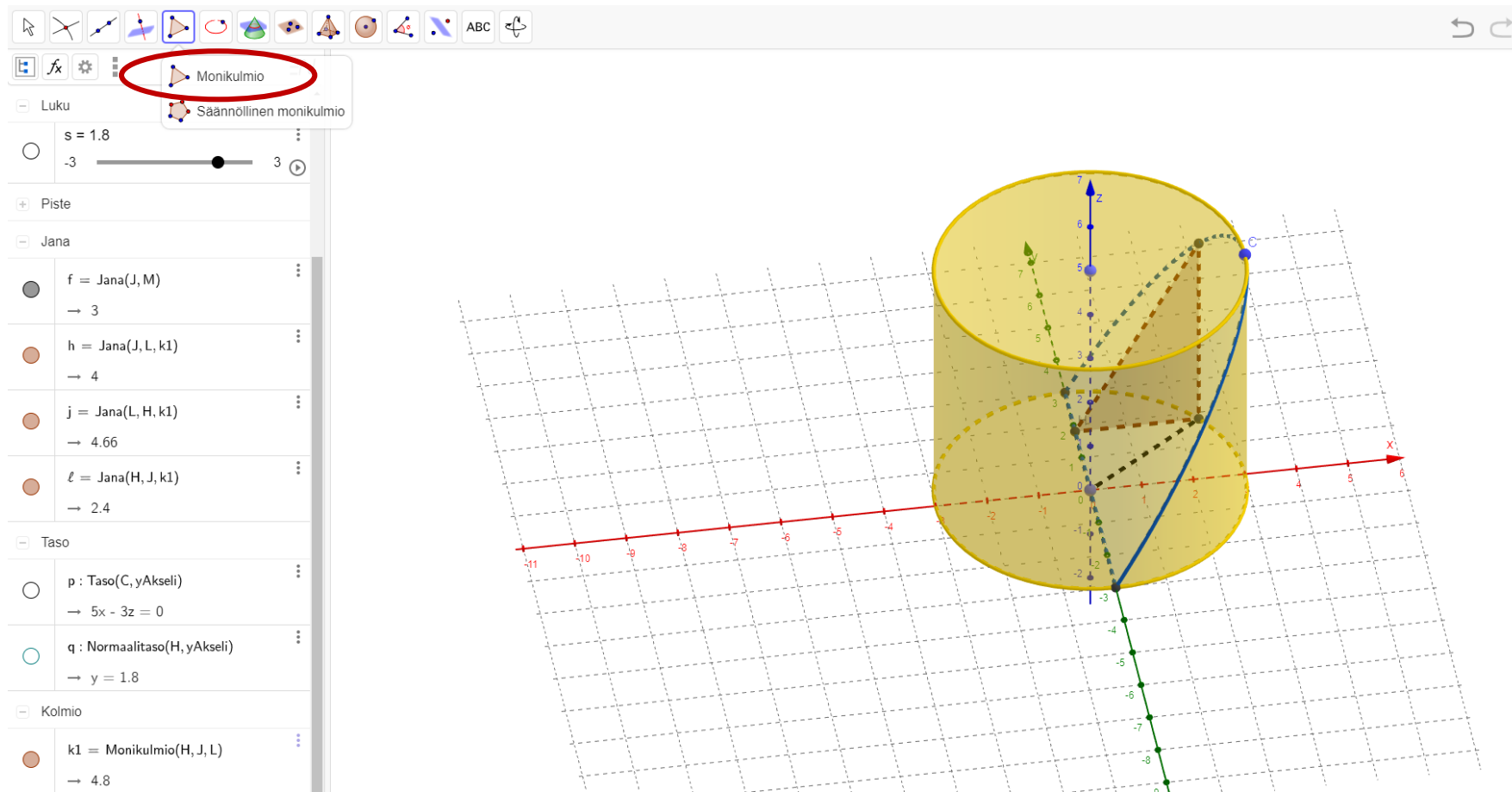
Määritetään nyt kohtisuoran tason leikkauspisteet pohjaympyrän ja vinon leikkauskäyrän kanssa. (Tarvitaan kaksi pistettä kolmiota varten. Kolmas piste on jo liukusäätimellä määritetty.)
Ylimääräiset muodostuvat pisteet kannattaa piilottaa pois näkyvistä.



Kun pisteet on saatu muodostettua, kannattaa toinenkin taso piilottaa pois näkyvistä.

Piirretään vielä lopuksi kolmio näiden pisteiden kautta, niin integroimissuunnassa liikuteltava leikkauskuvio on valmis. (Kolmion läpinäkyvyyttä ja väriä voi halutessaan muuttaa asetuksista.)

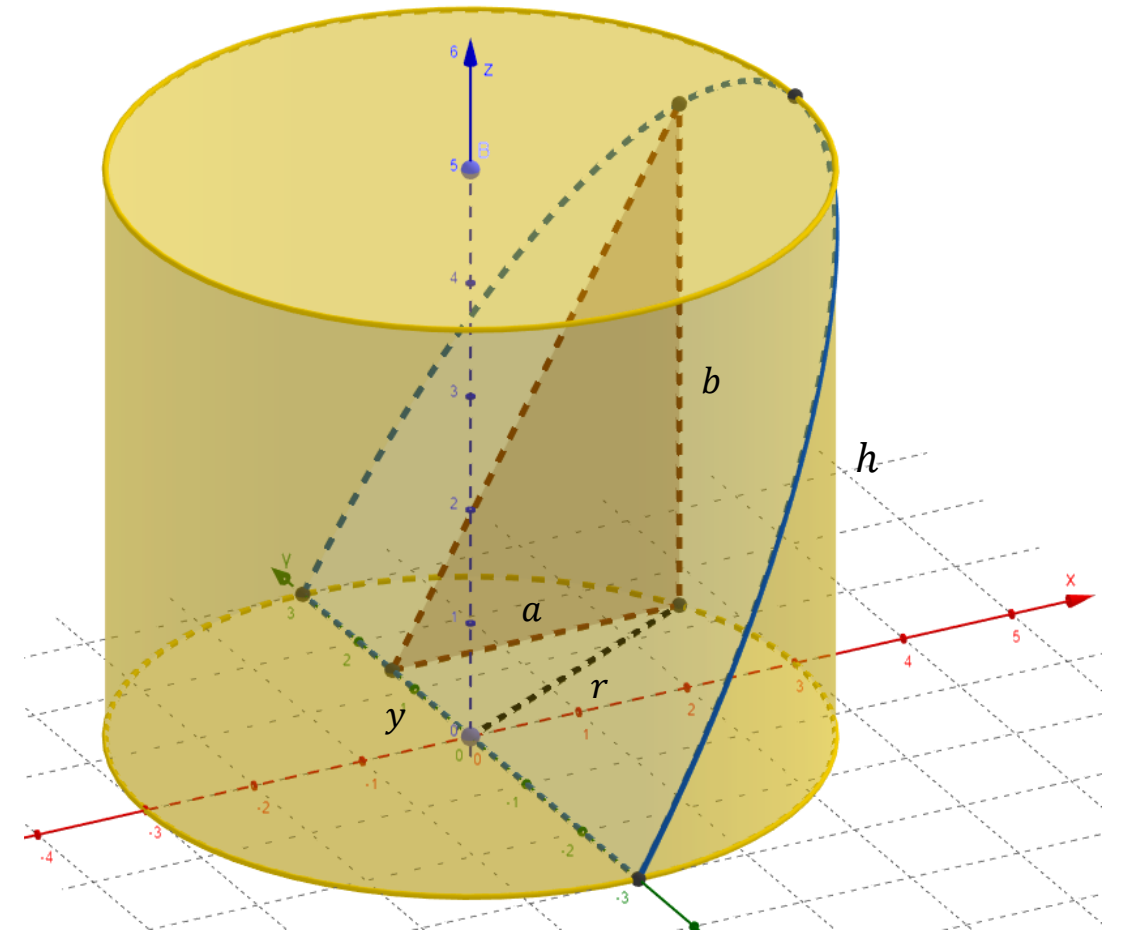
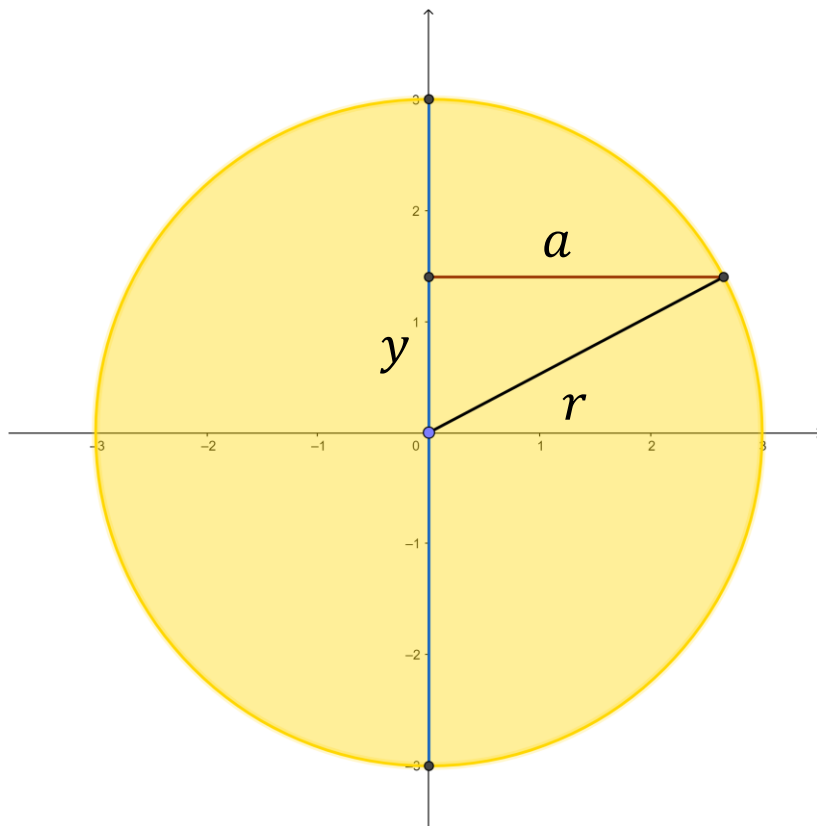
Laskua varten kannattaa piirtää vielä apujana (säde) pohjaympyrään (ja lisätä tarvittavat tekstit).



Ratkaisu:

Kun integroimissuunta on y – akselin suunta, niin palasen poikkileikkaukset ovat suorakulmaisia kolmioita.

Kolmion kannan pituus a voidaan määrittää pohjaympyrän avulla.



Pythagoraan lauseella saadaan $r^2 = y^2 + a^2$ eli

$$a^2 = r^2 - y^2.$$

Määritetään poikkileikkauksen korkeus b yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

Sivusta katsottuna huomataan suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat yhdenmuotoisia (kk, yhteinen kulma α ja suorat kulmat).

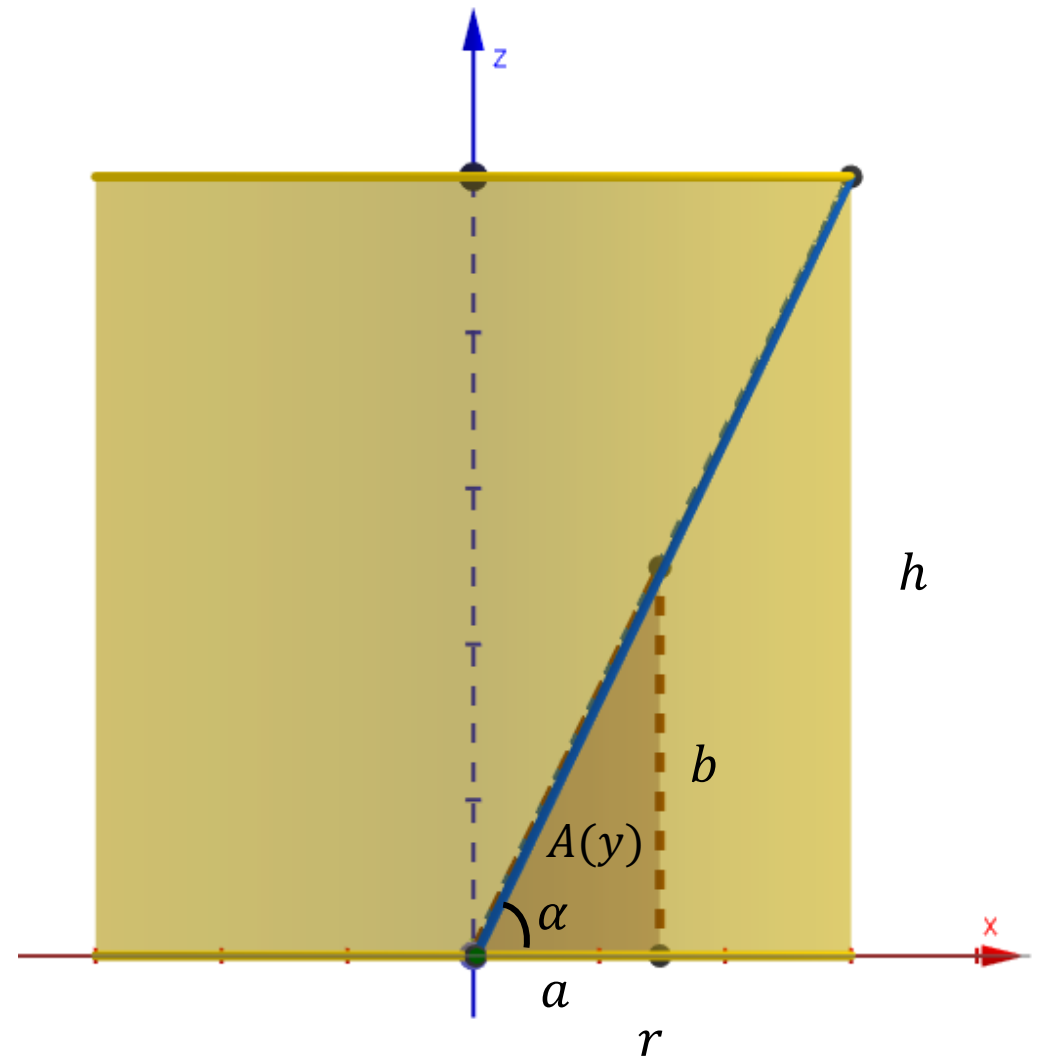
Siis vastinsivut ovat verrannollisia:

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{r} \iff b = \frac{h}{r} a$$

Poikkileikkauksen pinta-alan lausekkeeksi saadaan:

$$A(y) = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} a \cdot \frac{h}{r} a$$

$$A(y) = \frac{h}{2r} \cdot a^2 = \frac{h}{2r} (r^2 - y^2)$$



, missä $-r \leq y \leq r$.

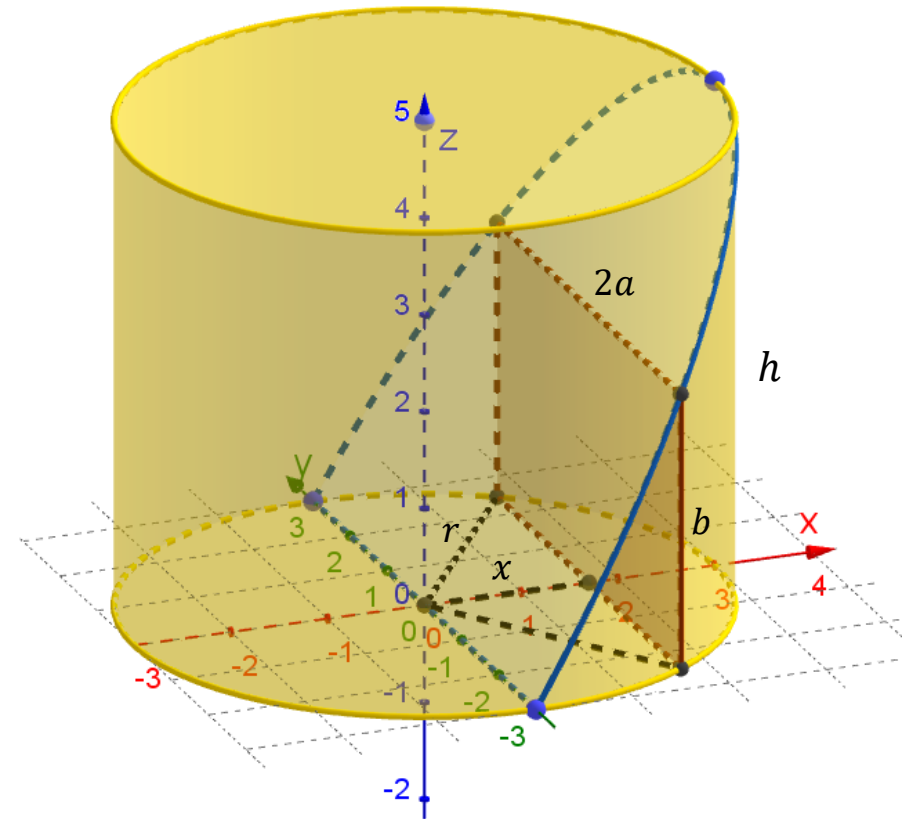
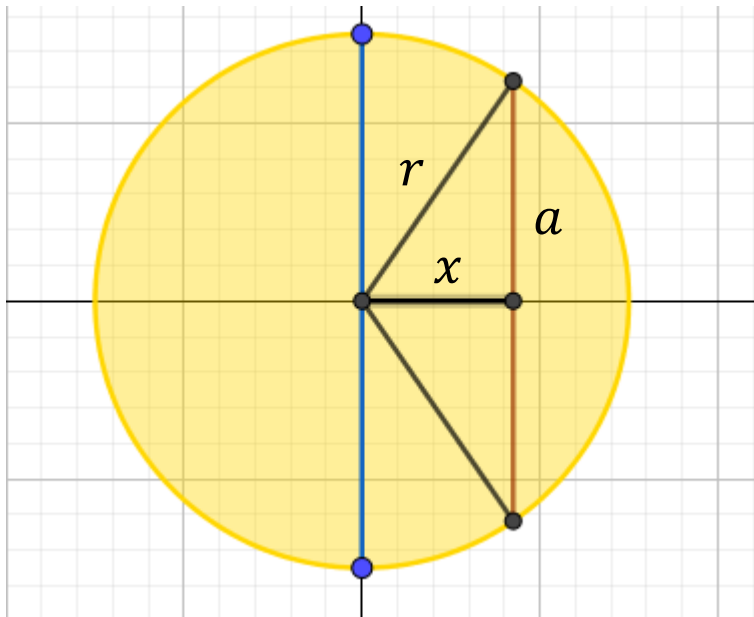
Palasen tilavuus saadaan nyt määrättyä integraalina. Symmetrian perusteella riittää integroida väliltä $0 \leq y \leq r$ ja kertoa tulos kahdella.

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r A(y) dy &= 2 \int_0^r A(y) dy = 2 \int_0^r \frac{h}{2r} (r^2 - y^2) dy = \frac{h}{r} \int_0^r (r^2 - y^2) dy \\ &= \frac{h}{r} \left/ \left(r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \right|_0^r = \frac{h}{r} \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) = \frac{h}{r} \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{2}{3} r^2 h \quad (\text{tai laskinohjelmalla}) \end{aligned}$$

Integroimissuunnan voi valita toisinkin (mutta integraalista tulee monimutkaisempi):

Kun integroimissuunta on x – akselin suunta, niin palasen poikkileikkaukset ovat suorakulmioita.

Suorakulmion kanta voidaan määrittää pohjaympyrän avulla. Merkitään kanta = $2a$.



Pythagoraan lauseella saadaan $r^2 = x^2 + a^2$ eli

$$a = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Määritetään poikkileikkauksen korkeus b yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

Sivusta katsottuna huomataan suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat yhdenmuotoisia (kk, yhteinen kulma α ja suorat kulmat).

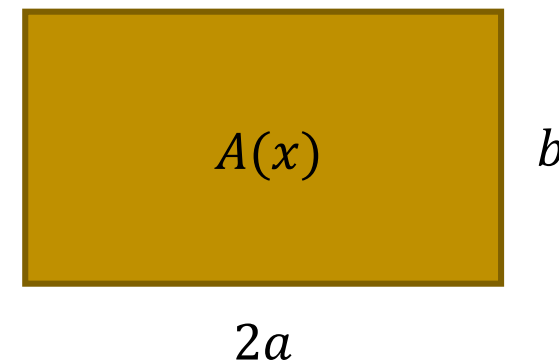
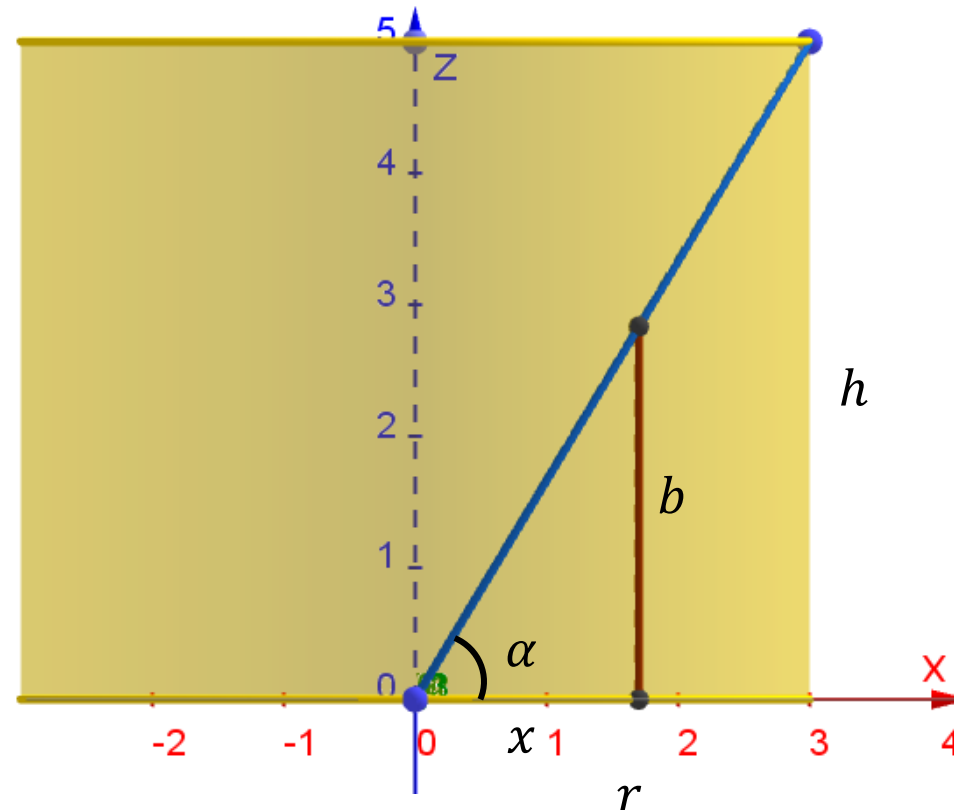
Siis vastinsivut ovat verrannollisia:

$$\frac{b}{x} = \frac{h}{r} \iff b = \frac{h}{r}x$$

Poikkileikkauksen pinta-alan lausekkeeksi saadaan:

$$A(x) = 2a \cdot b = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{h}{r}x$$

$$A(x) = \frac{2hx}{r} \sqrt{r^2 - x^2} \quad , \text{ missä } 0 \leq x \leq r.$$



Palasen tilavuus saadaan nyt määrättyinä integraalina:

$$\int_0^r A(x) dx = \int_0^r \frac{2hx}{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{2}{3} r^2 h. \quad (\text{laskinohjelmalla})$$

GeoGebran CAS-tilassa:

Integraali(2*h*x/r*sqrt(r^2-x^2),0,r)

$$\rightarrow 2 h r \frac{|r|}{3}$$

(Koska $r > 0$, niin itseisarvoa ei tarvita.)

Integraalin laskeminen ilman teknisiä apuvälineitä malliksi:

$$\begin{aligned}\int_0^r \frac{2hx}{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \frac{h}{r} \int_0^r 2x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{h}{r} \int_0^r -2x \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= \frac{h}{r} \int_r^0 -2x(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{h}{r} \left/ \frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right. \Bigg|_r^0 = \frac{2h}{3r} \left((r^2)^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{2h}{3r} \cdot r^3 = \frac{2}{3} r^2 h\end{aligned}$$