t. 221, s. 93

a) Ratkaisu derivaatan avulla. Merkitään *f(n) = a_n*, jolloin

$$f(x)=\frac{2x+4}{x+3},\quad x>0$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x+3)-(2x+4)\cdot 1}{(x+3)^2}\quad =\frac{2x+6-2x-4}{(x+3)^2}=\frac{2}{(x+3)^2}$$

Derivaatta on määritelty ja positiivinen, kun $x > 0$. Siis funktio f on aidosti kasvava, kun $x > 0$.

Täten myös lukujono (a_n) on aidosti kasvava.

b) Toinen tapa (peräkkäisten jäsenten erotus):

Muodostetaan lukujonon peräkkäisten jäsenten erotus yleisessä tapauksessa:

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2(n+1)+7}{n+1+3}-\frac{2n+7}{n+3}$$

$$\frac{2n+9}{n+4}-\frac{2n+7}{n+3}=\frac{(2n+9)(n+3)-(2n+7)(n+4)}{(n+4)(n+3)}$$

$$=\frac{2n^2+15n+27-2n^2-15n-28}{(n+4)(n+3)}=\frac{-1}{(n+4)(n+3)}<0 \qquad \text{kun } n \in \mathbb{Z}_+$$

Peräkkäisten jäsenten erotus $b_{n+1} - b_n$ on siis aina negatiivinen eli $b_{n+1} < b_n$ kaikilla indeksin n arvoilla. Jono (b_n) on siis aidosti vähenevä.