

Geometrinen summa

Geometrisen jonon peräkkäisten jäsenten summaa kutsutaan geometriseksi summaksi:
Muodostetaan geometrisen jonon a, aq, aq^2, \dots n ensimmäisen jäsenen summa:

$$S_n = a + aq + aq^2 \dots + aq^{n-1}$$

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

$$- qS_n = \quad aq + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n$$

Ryhmitellään summat S_n ja qS_n ja vähennetään allekkain.

$$S_n - qS_n = a \qquad -aq^n$$

$$S_n(1-q) = a(1-q^n) \quad \Bigg| : (1-q), q \neq 1$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

a = summan ensimmäinen jäsen

q = jonon peräkkäisten jäsenten suhdeluku $\neq 1$

n = yhteenlaskettujen jäsenten lukumäärä



Päättele tapauskohtaisesti!

t. 325, s. 137

a) Jono *rekursiivisesti* (seuraava jäsen määritellään edellisen avulla):

$$a_1 = 2000 \quad a_n = 1,08a_{n-1} + 40$$

Lasketaan jonon (a_n) jäseniä:

$$a_1 = 2000$$

$$a_2 = 1,08 \cdot 2000 + 40$$

$$a_3 = 1,08 \cdot (1,08 \cdot 2000 + 40) + 40 = 1,08^2 \cdot 2000 + 1,08 \cdot 40 + 40$$

$$a_4 = 1,08 \cdot (1,08^2 \cdot 2000 + 1,08 \cdot 40 + 40) = 1,08^3 \cdot 2000 + 1,08^2 \cdot 40 + 1,08 \cdot 40 + 40$$

- Yleinen periaate nähtävissä.
- Populaation suuruus n .
- vuoden alussa:
-

Geometrisen summa, $n - 1$ termiä

Ensimmäinen termi $a = 40$

Suhdeluku $q = 1,08$

$$a_n = 1,08^{n-1} \cdot 2000 + \overbrace{1,08^{n-2} \cdot 40 + 1,08^{n-1} \cdot 40 + \dots + 1,08^2 \cdot 40 + 1,08 \cdot 40 + 40}^{\leftarrow}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1,08^{n-1} \cdot 2000 + \frac{40(1-1,08^{n-1})}{1-1,08} = 1,08^{n-1} \cdot 2000 + 500 \cdot (1,08^{n-1} - 1) \\ &= 1,08^{n-1} \cdot 2000 + 500 \cdot 1,08^{n-1} - 500 \\ &= \underline{\underline{1,08^{n-1} \cdot 2500 - 500}} \end{aligned}$$

t. 325, s. 137

$$\text{b)} \quad a_n = 1,08^{n-1} \cdot 2500 - 500 > 5000$$

$$1,08^{n-1} \cdot 2500 > 5500$$

$$1,08^{n-1} > \frac{5500}{2500} = 2,2 \quad \left| \begin{array}{l} \log \end{array} \right.$$

$$(n-1) \log 1,08 > \log 2,2 \quad \left| \begin{array}{l} : \log 1,08 (> 0) \end{array} \right.$$

$$n-1 > \frac{\log 2,2}{\log 1,08}$$

$$n > \frac{\log 2,2}{\log 1,08} + 1 \approx 11,2$$

V: 12. vuoden alussa.