Logaritmi

- Eksponenttiyhtälöiden ratkaisuja kutsutaan logaritmeiksi.
- **Määritelmä**. Olkoon $a > 0$, $a \neq 1$ ja $b > 0$.

Logaritmi $\log_a b$ tarkoittaa lukua x, joka toteuttaa eksponenttiyhtälön $a^x = b$.

Toisin sanoen $a^x = b$ täsmälleen silloin kun $x = \log_a b$.

Esimerkki 1

Ratkaise yhtälö. Anna vastaukseksi tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.

a) $2^x = 5$

b) $4 \cdot 3^{2x} = 24$

c) $\log_5 x = 3$

Ratkaisu.

a) Määritelmän mukaan $x = \log_2 5$. Tarkka arvo on $x = \log_2 5$ ja likiarvo $x \approx 2{,}32$.

Esimerkki 1

b) $4 \cdot 3^{2x} = 24 \quad |:4$

$$3^{2x} = 6$$

$$2x = \log_3 6$$

$$x = \frac{\log_3 6}{2} \approx 0{,}82$$

c) Määritelmän mukaan $\log_5 x = 3$, kun $5^3 = x$ eli $x = 125$.

Esimerkki 2

Määritä

a) $\log_3 9$

b) $\log_2 \frac{1}{8}$

c) $\log_6 1$

d) $\log_7 \sqrt[3]{7}$

Ratkaisu.

a) $\log_3 9$ on se luku, johon 3 pitää korottaa, jotta saadaan 9. Koska $3^2 = 9$, niin $\log_3 9 = 2$.

b) Koska $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$, niin $\log_2 \frac{1}{8} = -3$.

c) Koska $6^0 = 1$, niin $\log_6 1 = 0$.

d) Koska $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$, niin $\log_7 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}$.

Laskusäännöt

Lause. Olkoon $a > 0, a \neq 1$. Kaikilla $x > 0$ ja $y > 0$ pätee

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

b) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

c) $\log_a x^r = r \log_a x$

Todistukset kirjassa/tehtävinä.

Esimerkki 3

Sievennä.

a) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 2 \cdot 8 = \log_4 16 = 2$ $\boxed{4^2 = 16}$

b) $\log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 8^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log_2 8 = \frac{1}{5} \cdot 3 = \frac{3}{5}$ $\boxed{2^3 = 8}$