Luonnollinen logaritmi

- **Määritelmä.** Luvun $x > 0$ e-kantaista logaritmia kutsutaan luonnolliseksi logaritmiksi ja merkitään $\ln x = \log_e x$.
- Logaritmi $\ln b$ on eksponenttiyhtälön $e^x = b$ ratkaisu.
- **Esimerkki 1.** Ratkaise yhtälö $2e^x - 6 = 0$.

$$\begin{aligned} 2e^x - 6 &= 0 \\ 2e^x &= 6 \quad |:2 \\ e^x &= 3 \\ x &= \ln 3 \end{aligned}$$

- Huom! Logaritmin laskusäännöt pätevät myös luonnolliseen logaritmiin.

Luonnollinen logaritmi

- **Lause.** Positiivisille luvuille a ja b pätee

  $\ln\ a = \ln b$ täsmälleen silloin, kun $a = b$.

- Lause pätee muihinkin logaritmeihin.

Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö $2^x = 9$.

Ratkaisu.

Määritelmän mukaan $x = \log_2 9$.

Ratkaistaan yhtälö myös lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
2^x &= 9 \\
\ln 2^x &= \ln 9 \\
x \ln 2 &= \ln 9 \quad |: \ln 2 \\
x &= \frac{\ln 9}{\ln 2}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\log x^r = r \log x}$

Kantaluvun muutos

- Eksponenttiyhtälöllä voi olla korkeintaan yksi ratkaisu, joten edellisessä esimerkissä saadut luvut ovat yhtä suuret:

$$\log_2 9 = \frac{\ln 9}{\ln 2}$$

- Yleisesti logaritmin kantaluku voidaan vaihtaa seuraavan kaavan avulla:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Erityisesti: $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

Esimerkki 3

Sievennä $\log_{16} 3 + \frac{1}{2}\log_4 3$.

Ratkaisu.

Jotta summa voidaan laskea, vaihdetaan ensimmäisen logaritmin kantaluvuksi 4.

$$\begin{aligned}\log_{16} 3 + \frac{1}{2}\log_4 3 &= \frac{\log_4 3}{\log_4 16} + \frac{1}{2}\log_4 3 \\ &= \frac{\log_4 3}{2} + \frac{1}{2}\log_4 3 = \log_4 3\end{aligned}$$

Yleisen eksponenttifunktion derivointikaava

Lause. $\mathrm{D}a^x = a^x \ln a$, kun $a > 0$.

Todistus.

Koska $a = e^{\ln a}$, niin $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)x}$. Funktio a^x on siis funktioiden $s(x) = (\ln a)x$ ja $u(x) = e^x$ yhdistetty funktio.

Ketjusäännön perusteella

$$\begin{aligned}\mathrm{D}a^x = \mathrm{D}e^{(\ln a)x} &= e^{(\ln a)x} \cdot \mathrm{D}\big((\ln a)x\big) \\ &= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

Esimerkki 4

Derivoi

a) 3^x

b) $x \cdot 2^x$

Ratkaisu.

a) $\mathrm{D}3^x = 3^x \ln 3$

b) $\mathrm{D}x \cdot 2^x = 1 \cdot 2^x + x \cdot 2^x \ln 2 = 2^x + x \cdot 2^x \ln 2$