Juurifunktion derivaatta ja kulun tutkiminen

- Juurifunktio voidaan derivoida kirjoittamalla juuri murtopotenssiksi ja käyttämällä potenssin derivoimissääntöä.
- **Lause.** $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$, kun $x > 0$ ja n on rationaaliluku.
- Esimerkki 1. Derivoi

a) $x\sqrt{x}$

b) $\frac{x^2}{3\sqrt{x}}$

c) $\sqrt{4x-1}, x > \frac{1}{4}$

Ratkaisu.

a) $\mathrm{D}x\sqrt{x} = \mathrm{D}\left(x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{D}x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x},\ \ x > 0.$

b) $\mathrm{D}\frac{x^2}{3\sqrt{x}} = \mathrm{D}\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{D}\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2},\ x > 0.$

c) $\mathrm{D}\sqrt{4x-1} = \mathrm{D}(4x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4x-1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 4$

$$= 2(4x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}, x > \frac{1}{4}.$$

Juurifunktion derivaatta ja kulun tutkiminen

- Tutkitaan juurifunktion derivaattaa applettien avulla:
  - parillinen juuri
  - pariton juuri
- Parillinen juuri $\sqrt[n]{x}$ on määritelty, kun $x \geq 0$ ja derivoituva, kun $x > 0$.
- Pariton juuri $\sqrt[n]{x}$ on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla ja derivoituva, kun $x > 0$ tai $x < 0$.

Juurifunktion kulku

- Yhdistetty funktio $\sqrt{s(x)}$ on määritelty ja jatkuva, kun $s(x) \geq 0$, mikäli funktio s on jatkuva.
- Jos s on lisäksi derivoituva, voidaan yhdistetty funktio $\sqrt{s(x)}$ derivoida ketjusäännön avulla, kun $s(x) > 0$.
- Olkoon funktio jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$. Jos funktio on lisäksi derivoituva välillä $]a, b[$, funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa tällä välillä välin päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.
- Huom! Ei ole merkitystä, onko funktio derivoituva välin päätepisteissä.

Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x} - x$ suurin arvo.

Ratkaisu.

Muodostetaan funktion kulkukaavio derivaatan avulla.

Funktion f on määritelty, kun $x \geq 0$.

$$f'(x) = \mathrm{D}\left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \quad | \cdot 2\sqrt{x}\,, x \neq 0$$

$$1 = 2\sqrt{x} \quad |:2$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Kulkukaavio:

		0		$\frac{1}{4}$	
$f'(x)$			$+$		$-$
$f(x)$			$\nearrow$		$\searrow$

$$f'\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{16}}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Funktion suurin arvo on

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

V: Funktion suurin arvo on $\frac{1}{4}$.