Funktion potenssin derivaatta

- Funktion potenssit derivoidaan yhdistetyn funktion derivoimissäännöllä $Du\big(s(x)\big) = u'(s(x)) \cdot s'(x)$.
- Esimerkki 1. $\mathrm{D}(x^2+1)^3$

$$= 3(x^2+1)^2 \cdot \mathrm{D}(x^2+1)$$

$$= 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2.$$

- Tuloksena saadaan tulomuotoinen lauseke, jonka nollakohdat voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla.
- Muista! Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa määrittelyjoukkoonsa sisältyvällä suljetulla välillä **välin päätepisteissä** tai välille kuuluvassa **derivaatan nollakohdassa.**

Esimerkki 2

Määritä funktion $f(x) = 2x(x-1)^3$ pienin ja suurin arvo välillä $[0, 1]$.

Ratkaisu. Funktio on derivoituva kaikilla x:n arvoilla, joten se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvon välillä $[0, 1]$ välin päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä.
$f(0) = 2 \cdot 0 \cdot (0-1)^3 = 0$
$f(1) = 2 \cdot 1 \cdot (1-1)^3 = 0$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}2x \cdot (x-1)^3 + 2x \cdot \mathrm{D}(x-1)^3 \\
&= 2(x-1)^3 + 2x \cdot 3(x-1)^2 \cdot 1 \\
&= 2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2 \\
&= 2(x-1)^2 \cdot \big((x-1) + 3x\big) \\
&= 2(x-1)^2(4x-1)
\end{aligned}
$$

Ryhmitellään etsimällä yhteiset tekijät.

$$2(x-1)^2(4x-1) = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 4x-1 = 0$$

$$x-1 = 0 \qquad\qquad 4x = 1$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = \frac{1}{4}$$

Molemmat nollakohdat ovat välillä $[0, 1]$.

Lasketaan funktion arvo derivaatan nollakohdassa $x = \frac{1}{4}$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1\right)^3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{27}{64}\right) = -\frac{27}{128}$$

Pienin arvo välillä $[0, 1]$ on $-\frac{27}{128}$ ja suurin 0.