

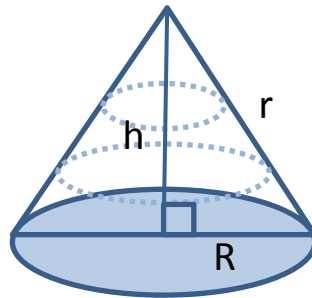
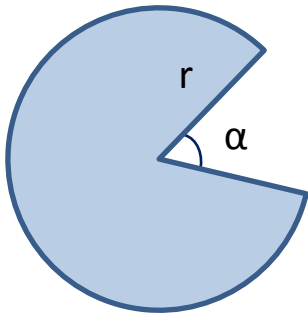
Yo-tehtävä S08/9

Ympyrälevystä, jonka säde on r , leikataan pois sektori, ja jäljelle jäänyt osa taivutetaan suoran ympyräkartion vaipaksi. Määritä pois leikatun sektorin keskuskulma asteen tarkkuudella, kun kartion tilavuus on mahdollisimman suuri.

Ratkaisu:

Olkoon kysytty keskuskulma α .

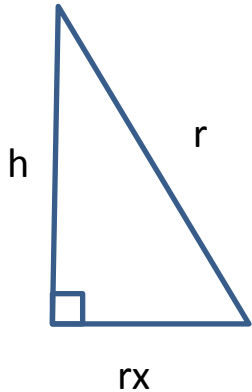
Merkitään $x = \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ}$, jolloin x on jäljelle jäävän sektorin osuus alkuperäiseen ympyrään verrattuna, $0 \leq x \leq 1$.



Jäljelle jäävä ympyräkaari $2\pi x$ muodostaa kartion pohjaympyrän kehän $2\pi R$, joten

$$2\pi x = 2\pi R \Leftrightarrow R = rx$$

Muodostetaan kartion tilavuuden V lauseke muuttujan x avulla esitettynä ($r = \text{vakio}$).



Kartion korkeus saadaan
Pythagoraan lauseella:

$$h^2 + (rx)^2 = r^2$$

$$h^2 = r^2 - r^2 x^2$$

$$h^2 = r^2 (1 - x^2)$$

$$h = \pm r \sqrt{1 - x^2}$$

(Vain positiivinen
ratkaisu käy)

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi r^2 x^2 r \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{3} r^3 x^2 \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Siirretään x^2 juuren sisään. (Positiiviset) vakiokertoimet eivät vaikuta ääriarvokohtiin (x -koordinaatteihin) ja juurilauseke saa suurimman arvonsa kun juurrettava on suurin. Riittää siis tutkia juurrettavan

$$f(x) = x^4 (1 - x^2) = x^4 - x^6$$

ääriarvoja suljetulla välillä $0 \leq x \leq 1$.

Derivoidaan ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat välillä $0 \leq x \leq 1$.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^5 = 2x^3(2 - 3x^2) = 0$$

Tulon nollasäännön perusteella

$$\Leftrightarrow 2x^3 = 0$$

$$x = 0$$

tai

$$2 - 3x^2 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0,82$$

Kulkukaavio:

	0	(0,5)	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	1
f'		+	-	
f				
maksimi				

Kulkukaavion perusteella funktion f , ja siten myös tilavuuden V , suurin arvo saavutetaan kun $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Testipisteet:

$$f'(0,5) = 4 \cdot 0,5^3 - 6 \cdot 0,5^5 = 0,3125 > 0$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^5 = -2 < 0$$

Kysytty keskuskulma on siis

$$\alpha = 360^\circ(1 - x) = 360^\circ(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}) \approx \underline{\underline{66^\circ}}$$