

Yhdistetty funktio

- Funktioiden f ja g *yhdistetty funktio* merkitään $g \circ f$.
- Yhdistetty funktio on *kuvaus*, jossa ensin lasketaan *sisäfunktion* arvo kohdassa x eli $f(x)$, ja sitten *ulkofunktion* arvo kohdassa $f(x)$ eli $g(f(x))$

$$\begin{array}{c} x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) \\ x \xrightarrow{g \circ f} g(f(x)) \end{array}$$

sisäfunktio

ulkofunktio

- Siis $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ja $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Esimerkki: Määritä $(f \circ g)(x)$ ja $(g \circ f)(x)$, kun $g(x) = x^4$ ja $f(x) = 1 - 2x$
- Ratkaisu:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4) = 1 - 2x^4 \quad \left(\text{tai } f(g(x)) = 1 - 2g(x) = 1 - 2x^4 \right)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - 2x) = (1 - 2x)^4 \quad \left(\text{tai } g(f(x)) = f(x)^4 = (1 - 2x)^4 \right)$$

- Siis $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

Yhdistetyn funktion derivaatta

- Yhdistetylle funktiolle $g \circ f$ voidaan johtaa (s. 101 – 102) derivoimissääntö

$$Dg(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)$$

- Derivoidaan siis ensin ulkofunktio ja lasketaan sen derivaatta kohdassa $f(x)$ ja kerrotaan lauseke sisäfunktion derivaatalla.***
- Funktion potenssin derivoimiskaava $Df(x)^n = nf(x)^{n-1} f'(x)$ on erityistapaus yhdistetyn funktion derivoimiskaavasta. Tässä ulkofunktio on $g(x) = x^n$ ja sisäfunktio $f(x)$

- Esimerkki: Määritä $De^{-\sqrt{x}}$
- Ratkaisu: (Sisäfunktio $-\sqrt{x}$, ulkofunktio e^x)

$$De^{-\sqrt{x}} = e^{-x^{\frac{1}{2}}} \cdot D(-x^{\frac{1}{2}})$$

Ulkofunktion e^x derivaatta on funktio itse

$$= e^{-x^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}\right) = e^{-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$