

t. 306

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (= \sqrt[x]{x}), \quad x > 0$$

- Tutkitaan ääriarvoja derivaatan avulla
- Muokataan funktio ensin kantaluvun e potenssiksi

$$x^{\frac{1}{x}} = (e^{\ln x})^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$f'(x) = D e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} D \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} D \frac{\ln x}{x} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} D \frac{\ln x}{x} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} D \frac{f}{g} &= \frac{f'g - g'f}{g^2} \\ f(x) &= \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) &= x, \quad g'(x) = 1 \end{aligned}}$$

Derivaatan nollakohdat määräytyvät osoittajan $1 - \ln x$ nollakohdista (muut tekijät $\neq 0$ määrittelyjoukossa)

Derivaatan nollakohdat:

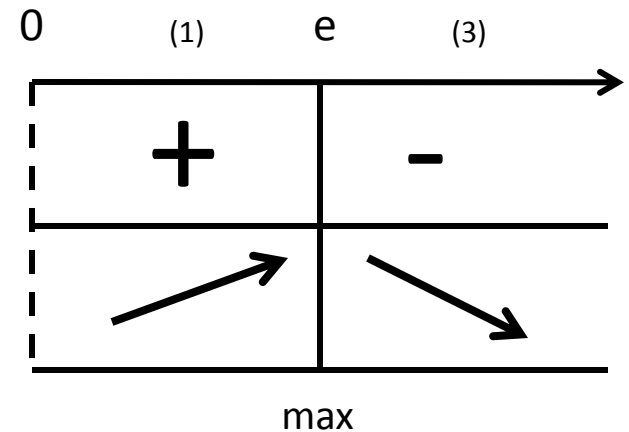
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1$$

$$x = e$$

$$f'(x)$$

$$f(x)$$



Kulkukaavion perusteella suurin arvo saadaan kohdassa $x = e$. Suurin arvo on

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e} \approx 1,4447$$

Pienintä arvoa ei ole

(Koska funktio on määritelty *avoimella välillä* $]0, \infty[$ ja funktio on aidosti kasvava välillä $]0, e[$ ja aidosti vähenevä välillä $]e, \infty[$)

Raja-arvot:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

Lasketaan merkit:

$$x = 1:$$

$$f'(1) = 1^1 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 > 0$$

$$x = 3:$$

$$f'(3) = \sqrt[3]{3} \frac{1 - \ln 3}{3^2} \approx -0,016 < 0$$

