

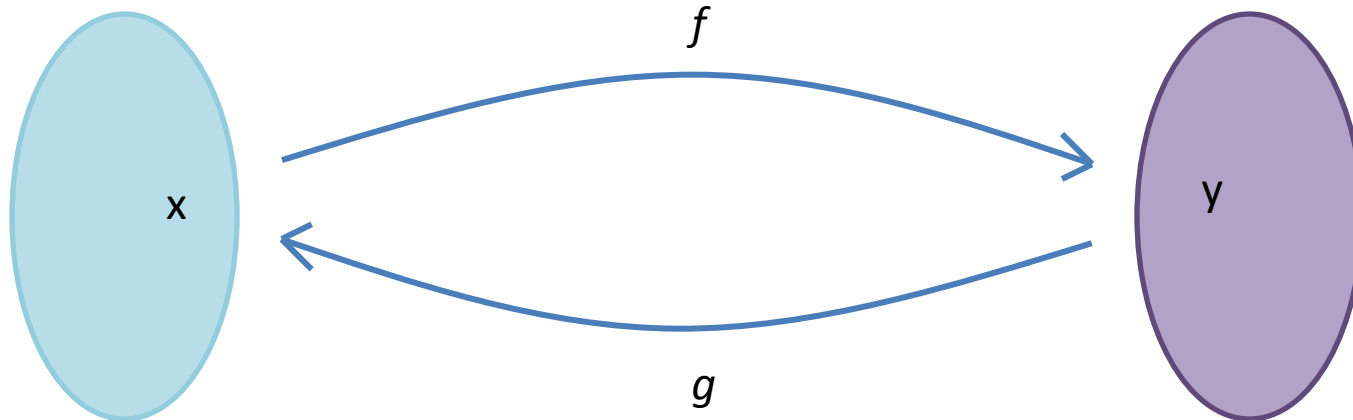
Käänteisfunktio

- Olkoon $f : A \rightarrow B$ funktio, jonka jokaista arvoa ($y \in B$) kohti on *yksikäsitteinen* määrittelyjoukon alkio ($x \in A$), jolle pätee

$$f(x) = y$$

Määrittelyjoukko A

Arvojoukko B



- Määritellään funktio $g : B \rightarrow A$ asettamalla $g(y) = x$, missä x on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu.
- Tällöin g on funktion f *käänteisfunktio*.

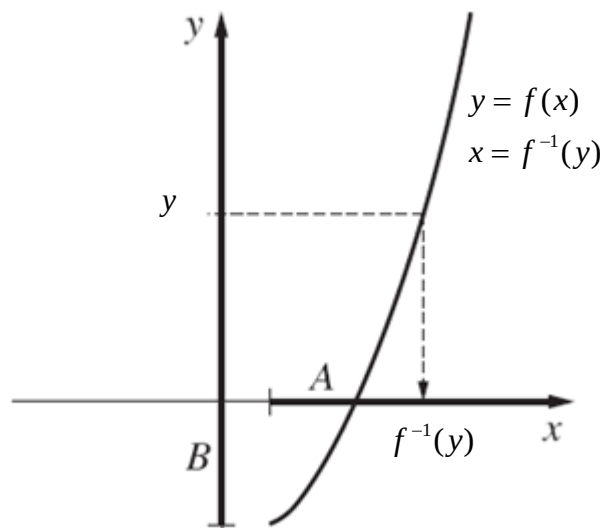
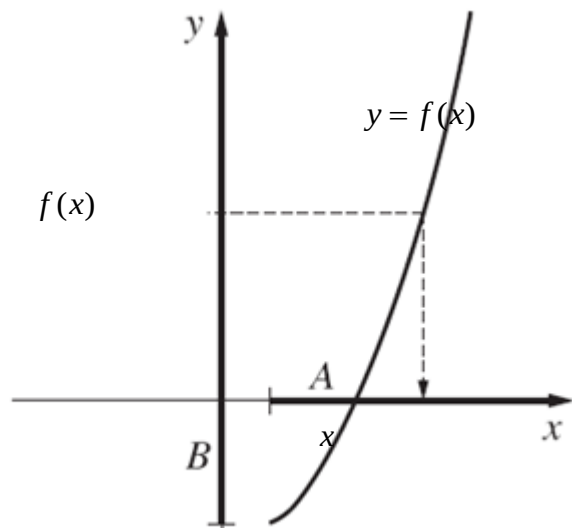
Käänteisfunktio

- Funktion $f : A \rightarrow B$ käänteisfunktio merkitään $f^{-1} : B \rightarrow A$.

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

- Funktio f ja sen käänteisfunktio f^{-1} kumoavat toisensa:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{ja} \quad f(f^{-1}(y)) = y$$



- Aidosti kasvava tai aidosti vähenevä funktio eli aidosti *monotoninen* funktio f saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa
- Aidosti monotonisella funktiolla f on siis käänteisfunktio f^{-1} , jonka määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko**

Esimerkkejä

- Onko funktiolla $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$, $f(x) = e^x$ käänteisfunktio?

Funktiolla $f(x) = e^x$ on käänteisfunktio $f^{-1}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, koska e^x on aidosti kasvava kaikilla reaaliluvuilla (sen derivaatta $e^x > 0$ kaikilla x :n arvoilla)

Määritetään käänteisfunktion lauseke ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{array}{l|l} y = e^x & \ln \\ \hline x = \ln y \end{array}$$

Kun vaihdetaan x :n ja y :n roolit, käänteisfunktion lausekkeeksi saadaan $f^{-1}(x) = \ln x$.
(Määrittelyjoukko on f :n arvojoukko $]0, \infty[$ ja arvojoukko f :n määrittelyjoukko $\mathbb{R}$.)

- Onko funktiolla $f(x) = -x^2 + 2$, $x \geq 0$ käänteisfunktio?

Funktio $-x^2 + 2$ ei ole aidosti monotoninen määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$, mutta kun määrittelyjoukkoa on rajoitettu ehdolla $x \geq 0$, niin f on aidosti vähenevä (derivaatta $-2x < 0$, kun $x > 0$)

$$\begin{aligned} y = -x^2 + 2 & \Leftrightarrow x^2 = 2 - y \\ x &= \sqrt{2 - y} \end{aligned}$$

Vaihdetaan muuttujakirjaimet:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{2 - x} \quad (= y)$$

Määrittelyjoukko $] -\infty, 2] = f$:n arvojoukko
Arvojoukko $[0, \infty[= f$:n määrittelyjoukko

Käänteisfunktion kuvaaja

- Jos funktion f käänteisfunktion f^{-1} muuttujana on x , niin käänteisfunktion kuvaaja $y = f^{-1}(x)$ saadaan kuvaajasta $y = f(x)$ vaihtamalla kuvaajan pisteiden x - ja y -koordinaatit keskenään.
- Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen funktion kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen

