Eksponenttifunktioiden derivaatta

- Yleinen eksponenttifunktio k^x, missä $k > 0$, voidaan derivoida funktion e^x ja yhdistetyn funktion derivoimiskaavalla, kun merkitään $k = e^{\ln k}$

$$Dk^x = D\left(e^{\ln k}\right)^x = De^{x\ln k}$$

Käytetään yhdistetyn funktion derivoimiskaavaa (sisäfunktio $x \ln k$, ulkofunktio e^x)

$$e^{x\ln k}D(x\ln k) = e^{x\ln k} \cdot \ln k$$

$$Dk^x = k^x \ln k$$

- Siis eksponenttifunktion k^x derivaatta on alkuperäinen eksponenttifunktio kerrottuna kantaluvun k luonnollisella logaritmilla $\ln k$
- Toisaalta eksponenttifunktiot voidaan aina derivoida muuttamalle ne *e*-kantaisiksi luonnollisen logaritmin avulla
- Esimerkki: Derivoi funktio $f(x) = 0{,}1^x$
- Ratkaisu:

$$f(x) = \left(e^{\ln 0{,}1}\right)^x = e^{x\ln 0{,}1} = e^{-x\ln 10}$$

$$f'(x) = -\ln 10 e^{-x\ln 10} = -10^{-x}\ln 10$$

- ($f'(x) < 0$ kaikilla x:n arvoilla, joten f on kaikkialla aidosti vähenevä)

t. 263, s. 114

a) Isotoopin määrä vähenee eksponentiaalisesti ajan *t* (vuorokautta) funktiona. Alkuperäinen 3,0 kg määrä puoliintuu 8 päivän välein. Funktion *m(t)* arvot kilogrammoina:

$$m(t) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = 3 \cdot 2^{\frac{-t}{8}} = 3\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{-t}{8}} = 3e^{\frac{-t\ln 2}{8}}, \qquad t \geq 0$$

b) Muutosnopeus saadaan derivoimalla funktio *m* ajan *t* suhteen.

(sisäfunktio $-\frac{t\ln 2}{8}$,ulkofunktio $3e^{t}$)

$$m'(t) = 3e^{\frac{-t\ln 2}{8}} \cdot D\left(-t\frac{\ln 2}{8}\right) \Leftrightarrow \quad m'(t) = -\frac{3\ln 2}{8} \cdot e^{\frac{-t\ln 2}{8}}$$

Muutosnopeus, kun *t* = 4:

$$m'(4) = -\frac{3\ln 2}{8} \cdot e^{\frac{-4\ln 2}{8}} = -\frac{3\ln 2}{8} \cdot e^{\frac{-\ln 2}{2}} \approx -0{,}1838$$

4 vuorokauden kuluttua jodin määrä vähenee nopeudella <u>0,18 kg/d</u>

Muutosnopeus, kun *t* = 10:

$$m'(10) = -\frac{3\ln 2}{8} \cdot e^{\frac{-10\ln 2}{8}} \approx -0{,}1093$$

10 vuorokauden kuluttua jodin määrä vähenee nopeudella <u>0,11 kg/d</u>

Jodi-isotoopin ^{131}I määrä ajan funktiona