

Trigonometristen funktioiden suurimpia ja pienimpiä arvoja

- [Tutkitaan](#) jaksollisen funktion suurinta ja pienintä arvoa.
- **Lause.** Jaksollisen funktion suurin ja pienin arvo koko määrittelyjoukossa ovat yhtä suuret kuin suurin ja pienin arvo jakson pituisella suljetulla välillä.

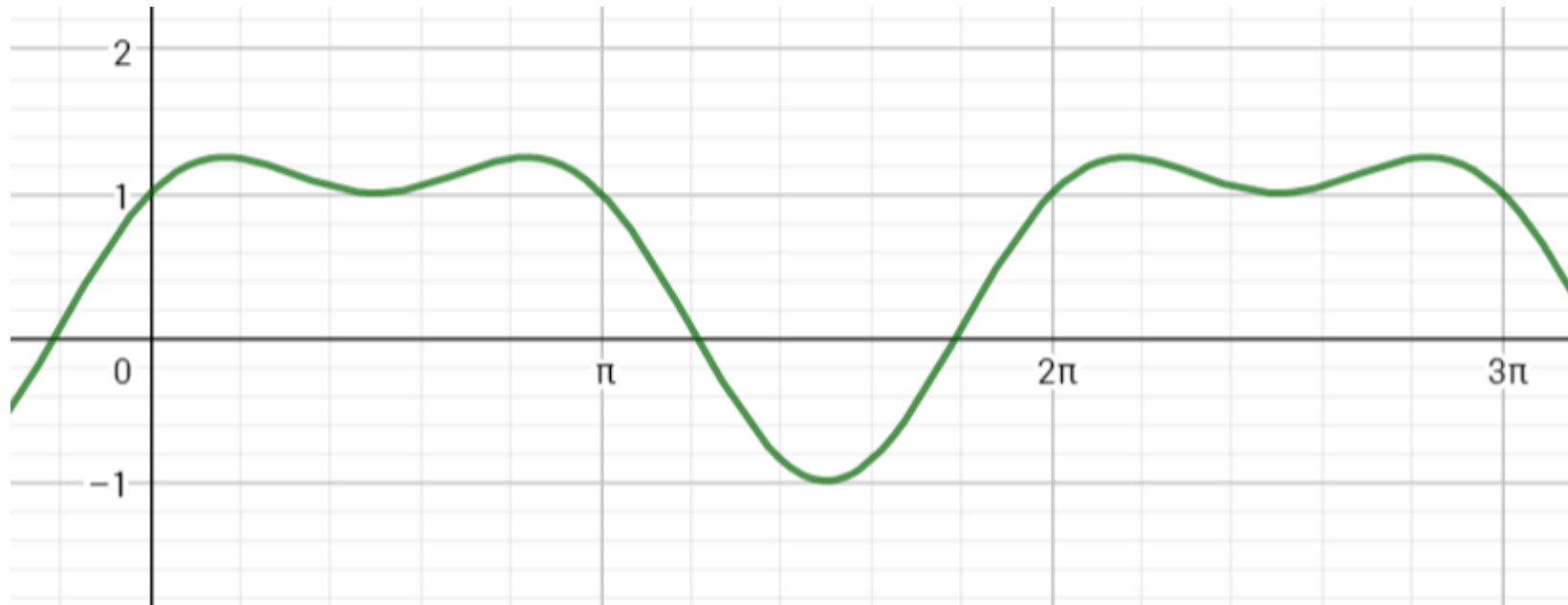
→ Jos funktio on jaksollinen, voidaan tutkia vain yhtä jakson pituista suljettua väliä.

→ Jos funktio on jatkuva ja derivoituva jakson pituisella avoimella välillä, suurin ja pienin arvo löydetään välin päätepisteestä tai välillä sijaitsevasta derivaattafunktion nollakohdasta.

Esimerkki

Määritä funktion $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ suurin ja pienin arvo.

Ratkaisu.



Koska sinin ja kosinin jakso on 2π , funktio saa kaikki arvonsa välillä $[0, 2\pi]$.

Funktio f on derivoituva kaikilla x :n arvoilla, joten se saa suljetulla välillä $[0, 2\pi]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) + \cos x = -2 \cos x \sin x + \cos x$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$-2 \cos x \sin x + \cos x = 0$$

$$\cos x(-2 \sin x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{tai} \quad -2 \sin x + 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad \text{tai} \quad 2 \sin x = 1 \quad |:2$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Derivaatan nollakohdista välille $[0, 2\pi]$ kuuluu $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$,

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ja } x = \frac{5\pi}{6}.$$

Lasketaan funktion f arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

$$f(0) = f(2\pi) = \cos^2 0 + \sin 0 = 1^2 + 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 0^2 + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos^2 \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = 0^2 + (-1) = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

Funktion f suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin arvo on -1 .