

Siniyhtälö ja kosiniyhtälö

- Tutkitaan ensin siniyhtälöä $\sin x = a$ [appletilla](#).
- Lause 1. Jos yhtälöllä $\sin x = a$ on yksi ratkaisu $x = \alpha$, niin yhtälön täydellinen ratkaisu on

$$x = \alpha + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \alpha + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Esimerkki 1. Ratkaise yhtälö $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Taulukon mukaan kulman $\frac{\pi}{3}$ sini on $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Siniyhtälö ja kosiniyhtälö.

- Tutkitaan seuraavaksi kosiniyhtälöä $\cos x = a$ [appletilla](#).
- Lause 2. Jos yhtälöllä $\cos x = a$ on yksittäinen ratkaisu $x = \alpha$, niin yhtälön täydellinen ratkaisu on

$$x = \alpha + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\alpha + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

- Esimerkki 2. Ratkaise yhtälö $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Taulukon mukaan kulman $\frac{\pi}{3}$ kosini on $\frac{1}{2}$.

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Siniyhtälö ja kosiniyhtälö

- Mitä jos, $\sin \alpha = \sin \beta$ tai $\cos \alpha = \cos \beta$?
- Kulmien sinit ovat yhtä suuret, kun kulmien kehäpisteiden y-koordinaatit ovat yhtä suuret \rightarrow kulmien täytyy olla samat tai toistensa supplementtikulmat.
- Kulmien kosinit ovat yhtä suuret, kun kulmien kehäpisteiden x-koordinaatit ovat yhtä suuret \rightarrow kulmien täytyy olla samat tai toistensa vastakulmat.

Siniyhtälö ja kosiniyhtälö

- Lause 3.

$\sin \alpha = \sin \beta$ täsmälleen silloin, kun

$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = \pi - \beta + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$\cos \alpha = \cos \beta$ täsmälleen silloin, kun

$$\alpha = \beta + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = -\beta + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Siniyhtälö ja kosiniyhtälö

- Esimerkki 3. Ratkaise yhtälö $\sin 4x = \sin x$.

$$\sin 4x = \sin x$$

$$4x = x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 4x = \pi - x + n \cdot 2\pi$$

$$3x = n \cdot 2\pi \quad | :3 \qquad 5x = \pi + n \cdot 2\pi \quad | :5$$

$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}$$

$$\forall: x = n \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{\pi}{5} + n \cdot \frac{2\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$