Derivaattafunktio

- Mikä on funktion derivaatta eri kohdissa?
- Määritelmä: Derivaattafunktio f' on funktio, jonka arvo $f'(x)$ on funktion f derivaatta kohdassa x.
- Määritetään derivaatan määritelmän avulla funktion $f(x) = x^2$ derivaattafunktio kohdassa $x = a$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \to a} x + a = 2a$$

Eli funktion f derivaatta kohdassa a on $2a$. Toisin sanoen derivaatta kohdassa x on $2x$ ja funktion f derivaattafunktio $f'(x) = 2x$.

Derivaattafunktio

- Jos funktiolle ei ole annettu nimeä, voidaan derivoimista merkitä kirjaimella D tai merkinnällä $\frac{d}{dx}$.
- Erotusosamäärän raja-arvon avulla voidaan määrittää muidenkin funktioiden derivaatat.
- **Lause 1.** Jos funktio x^n on derivoituva, niin $Dx^n = nx^{n-1}$, kun $n = 2, 3, 4, \ldots$
- Esimerkki 1. Derivoi funktiot x^3 ja x^6.
  $Dx^3 = 3x^2$ ja $Dx^6 = 6x^5$.

Derivaattafunktio

- **Lause 2.** Kun k on vakio ja kun f ja g ovat derivoituvia funktioita, niin

a) $Dk = 0$

b) $D(kx) = k$

c) $D(f(x) + g(x)) = Df(x) + Dg(x)$

d) $D\big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot Df(x)$

Esimerkki 2

a) Muodosta funktion $g(x) = -3x$ derivaattafunktio.
b) Määritä $D(3x^5)$.
c) Muodosta $f'(x)$, kun $f(x) = 4x^2 - 3x + 4$
d) Mikä on funktion $h(x) = -2x^4 - 3$ muutosnopeus kohdassa $x = 2$.

Ratkaisu.

a) $g'(x) = -3$
b) $D(3x^5) = 3 \cdot Dx^5 = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$

c) $f'(x) = D(4x^2 - 3x + 4) = 4 \cdot 2x - 3 \cdot 1 = 8\mathrm{x} - 3$

d) Muodostetaan ensin derivaattafunktio ja lasketaan sitten sen arvo

kohdassa $x = 2$.

$h'(x) = -2 \cdot 4x^3 - 0 = -8x^3$

$h'(2) = -8 \cdot 2^3 = -64$