

Korkeamman asteen polynomifunktio ja yhtälö

Yleinen n :n asteen polynomifunktio voidaan esittää muodossa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

jossa $a_n \neq 0$ ja n on positiivinen kokonaisluku.

Astetta n olevalla polynomifunktiolla on enintään n nollakohtaa.

Korkeamman asteen polynomifunktio ja yhtälö

Esimerkki 1. Mikä on polynomin $3x^6(2x^2 - 1)$ asteluku?

$$3x^6(2x^2 - 1) = 6x^8 - 3x^6$$

Polynomin asteluku on 8.

Korkeamman asteen polynomifunktio ja yhtälö

Esimerkki 2. Määritä polynomifunktion $f(x) = 3x^6 + 24x^3$ nollakohdat.

$$3x^6 + 24x^3 = 0$$

$$3x^3(x^3 + 8) = 0$$

$$3x^3 = 0 \quad |:3 \quad \text{tai} \quad x^3 + 8 = 0$$

$$x = 0$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8}$$

$$x = -2$$

Nollakohtaa ei voida ratkaista suoraan juuren avulla.

Funktion f nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -2$.

Yhteisessä tekijässä voi olla useampiakin termejä. Tällainen yhteinen tekijä on mahdollista löytää **ryhmittelemällä**.

Esimerkki 3. Ratkaise yhtälö $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Nyt } x^3 - 7x^2 + 2x - 14 &= x^2(x - 7) + 2(x - 7) \\ &= (x - 7)(x^2 + 2) \end{aligned}$$

Molemmissa on tekijänä $x - 7$.

Käytetään tulon nollasääntöä.

$$(x - 7)(x^2 + 2) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 2 = 0$$

$$x = 7$$

$$x^2 = -2$$

ei ratkaisua

V: Yhtälön ratkaisu on $x = 7$.

Korkeamman asteen polynomifunktio ja yhtälö

- **Lause.** Lauseke $x - a$ on polynomin tekijä täsmälleen silloin, kun $x = a$ on polynomin nollakohta.
- Jos tiedetään kaikki polynomin nollakohdat x_1, x_2, \dots, x_n , polynomi voidaan kirjoittaa muotoon
$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$
- Jotkin nollakohdista x_1, x_2, \dots, x_n voivat olla keskenään yhtä suuria. Tällaisia kohtia kutsutaan **moninkertaisiksi nollakohdissa**.

Johdetaan kaava summan kuutiolle:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \\ &= (a + b)^2 \cdot (a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

• **Summan kuution muistikaava**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- Jotkin korkeamman asteen yhtälöt voidaan palauttaa toisen asteen yhtälöiksi muuttujanvaihdon avulla.

Esimerkki 4. Ratkaise yhtälö $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.

Ratkaisu.

Merkitään $z = x^2$. Tällöin $x^4 + 3x^2 - 4 = z^2 + 3z - 4$.

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$z = -4 \quad \text{tai} \quad z = 1$$

Koska $z = x^2$, niin

$$x^2 = -4 \quad \text{tai} \quad x^2 = 1$$

$$\text{ei ratkaisua} \quad x = 1 \text{ tai } x = -1$$

Yhtälön ratkaisut ovat
 $x = 1$ ja $x = -1$.