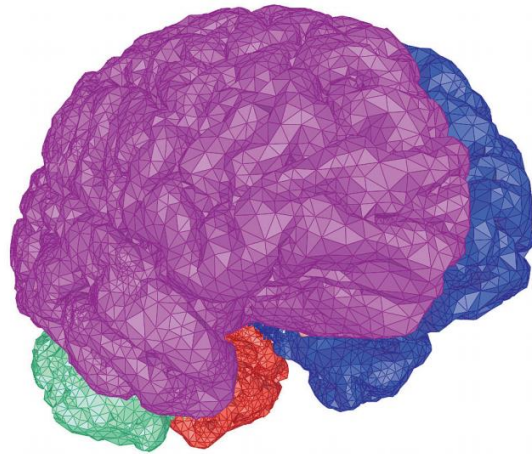


Kolmiulotteisissa mallinnusohjelmissa kappaleet esitetään usein kolmioinnin avulla. Tällöin kappaleen pintaa kuvataan suurella määrällä pieniä kolmioita. Jotta voidaan selvittää, mikä kappaleen kohta näkyy tietyistä pisteistä tiettyyn suuntaan katsottuna, täytyy selvittää, mikä kolmio ensimmäisenä tulee vastaan, kun liikutaan katselupisteestä annettuun suuntaan. Vastaa seuraavaan kysymykseen, joka liittyy tähän ongelmaan:

Osuuko origosta vektorin $\bar{s} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ suuntaan lähtevä puolisuora kolmioon, jonka kärkien paikkavektorit ovat

$$\begin{aligned}\bar{a} &= 3\bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k} \\ \bar{b} &= 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k} \\ \bar{c} &= 4\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}?\end{aligned}$$

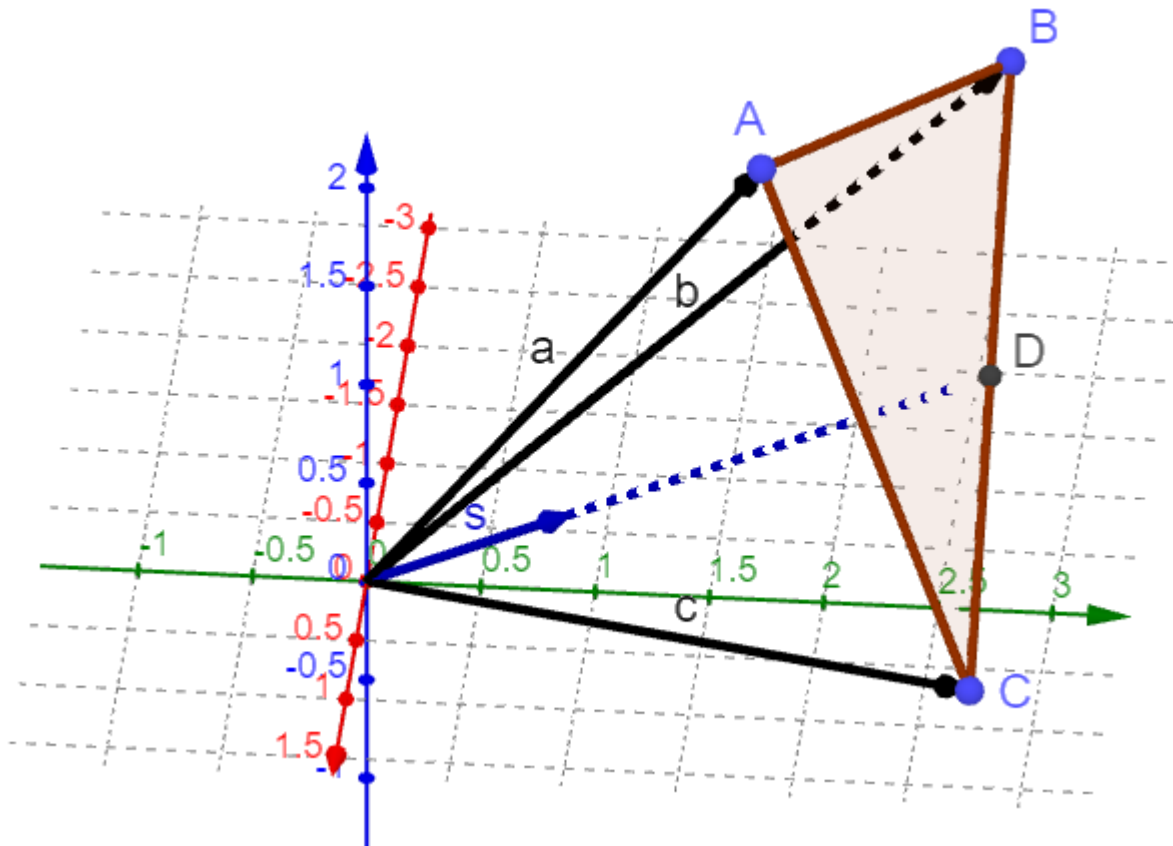
Oletetaan tunnetuksi, että kyseessä olevan kolmion pisteet ovat muotoa $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, kun $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ja $\alpha + \beta + \gamma = 1$.



GeoGebran mallikuvion mukaan puolisuora osuu kolmioon ABC , jonka kärjet määräytyvät paikkavektoreista $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$.

Tarkemmin sanottuna puolisuora osuu kolmion sivuun BC pisteessä $D = (3,3,3)$.

Osoitetaan tämä täsmällisesti (algebrallisesti) hyödyntäen tehtäväannon lisätietoa.



Puolisuoran (yleisen pisteen P paikkavektorin $\overline{OP}$) vektorimuotoinen yhtälö on

$$\overline{OP} = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k} + t(s_x\bar{i} + s_y\bar{j} + s_z\bar{k}), \quad t \geq 0,$$

missä (x_0, y_0, z_0) on jokin tunnettu suoran piste ja $s_x\bar{i} + s_y\bar{j} + s_z\bar{k}$ suoran jokin suuntavektori.

Valitsemalla $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ja $s_x\bar{i} + s_y\bar{j} + s_z\bar{k} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ yhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\overline{OP} = t(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}), \quad t \geq 0$$

Tehtävänannon mukaan kolmion pisteet ovat muotoa $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$, missä $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ja $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Ratkaistaan GeoGebralla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = t(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}) \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

muuttujien α, β, γ (GeoGebrassa x, y, z) ja t suhteen.

Ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 1/2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Ratkaisu toteuttaa vaaditut ehdot $\alpha, \beta, \gamma, t \geq 0$, joten puolisuora osuu kolmioon (pisteessä, jonka paikkavektori on $\overline{OP} = 3(\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$ eli pisteessä $P = (3, 3, 3)$).

	$x a + y b + z c = t s$
1	$\rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y + 4z \\ 2x + 3y + 3z \\ 4x + 4y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$
2	$3x + 2y + 4z = t$ $\rightarrow 3x + 2y + 4z = t$
3	$2x + 3y + 3z = t$ $\rightarrow 2x + 3y + 3z = t$
4	$4x + 4y + 2z = t$ $\rightarrow 4x + 4y + 2z = t$
5	eq1 : $x + y + z = 1$ $\rightarrow$ eq1 : $x + y + z = 1$
6	$\{\$2, \$3, \$4, \text{eq1}\}$ Ratkaise: $\left\{ \left\{ x = 0, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}, t = 3 \right\} \right\}$