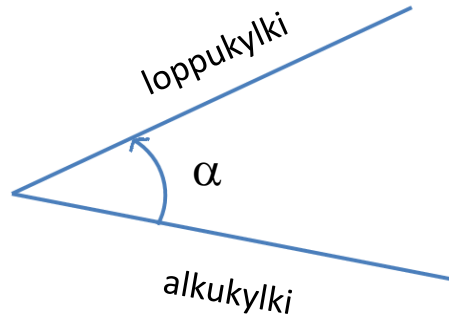


Suunnatun kulman sini ja kosini

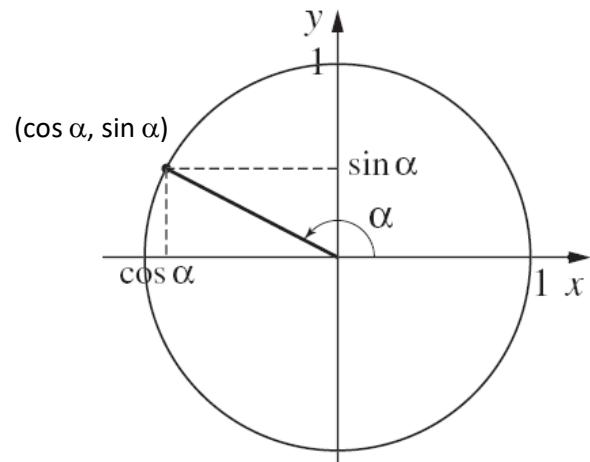
- Suunnattu kulma ilmaisee kierron *suunnan* ja *suuruuden*



Kierto vastapäivään on sovittu positiiviseksi kiertosuunnaksi

Kulman α kiertosuuntaa vaihtamalla saadaan vastakulma $-\alpha$.

- *Yksikköympyrän* (säde $r = 1$) avulla voidaan määrittää minkä tahansa suunnatun kulman sini ja kosini:



Kulman α sini on kulman kehäpisteen y-koordinaatti

Kulman α kosini on kulman kehäpisteen x-koordinaatti

Tangentti

Suunnatun kulman tangentin määritelmä

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Tangentin määrittelyehto

$\alpha \neq 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, missä n on kokonaisluku.

($\cos \alpha \neq 0$)

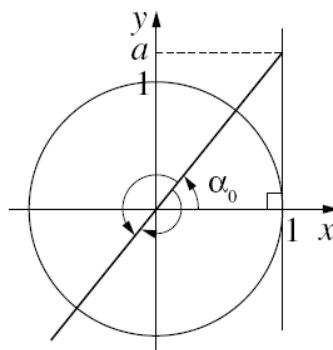
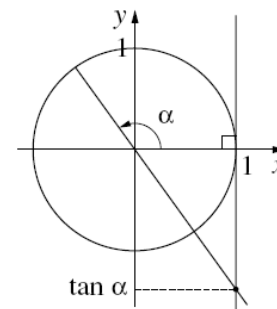
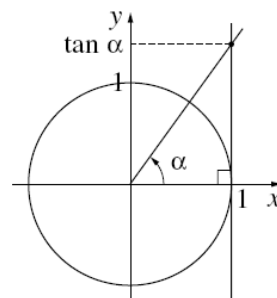
Yhtälön $\tan \alpha = a$ ratkaisu

Jos α_0 on yksi kulma, joka toteuttaa yhtälön, niin yhtälön ratkaisu on

$$\alpha = \alpha_0 + n \cdot 180^\circ, \\ n \text{ kokonaisluku}$$

Tangentin geometrinen määritelmä

Kulman α tangentti on kulman α tangentialipisteen y -koordinaatti.



Tangentin jakso on siis $180^\circ (= \pi \text{ rad})$.

Radiaani

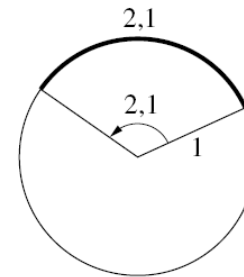
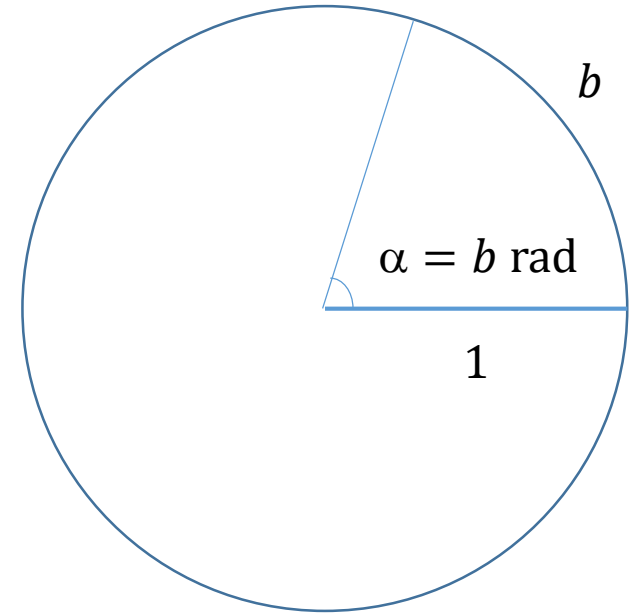
- *Radiaani* on "luonnollinen" kulman yksikkö joka määritellään *kaaren pituuden* avulla
- Kun ympyrän säde $r = 1$, niin kulman α suuruus radiaaneina on kulmaa vastaavan kaaren b pituus.
- Radiaani on yksikötön suure, mutta usein käytetään lyhennysmerkintää *rad*.
- Yksikköympyrän kehän pituus $2\pi r = 2\pi$

$$\Rightarrow 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

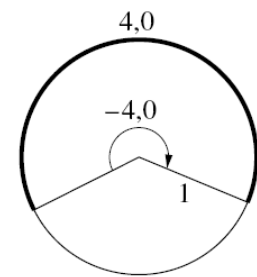
$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175$$



kaaren pituus 2,1

kulman suuruus 2,1



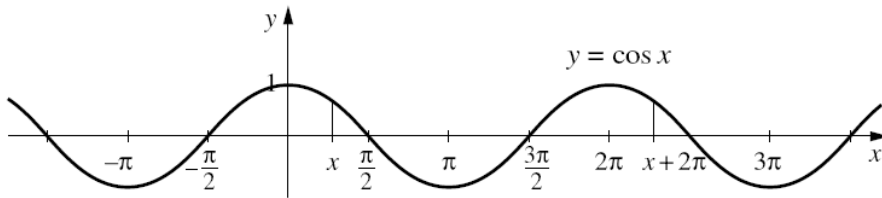
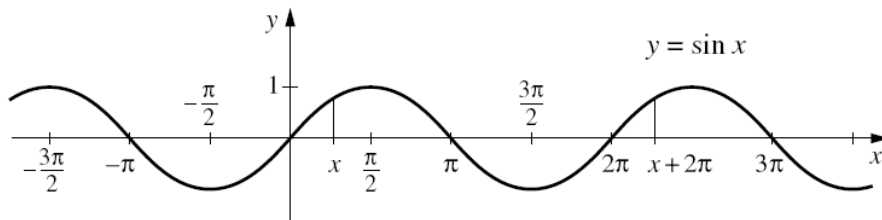
kaaren pituus 4,0

kulman suuruus -4,0

Trigonometriset funktiot

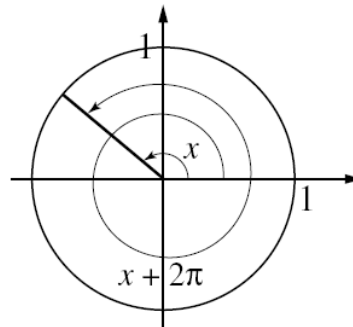
- Trigonometriset funktiot ovat *jaksollisia*, koska ne määritellään yksikköympyrän avulla
- Jaksollisen funktion arvot toistuvat tasaisin välein

Sinifunktion ja kosinifunktion jaksot



$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

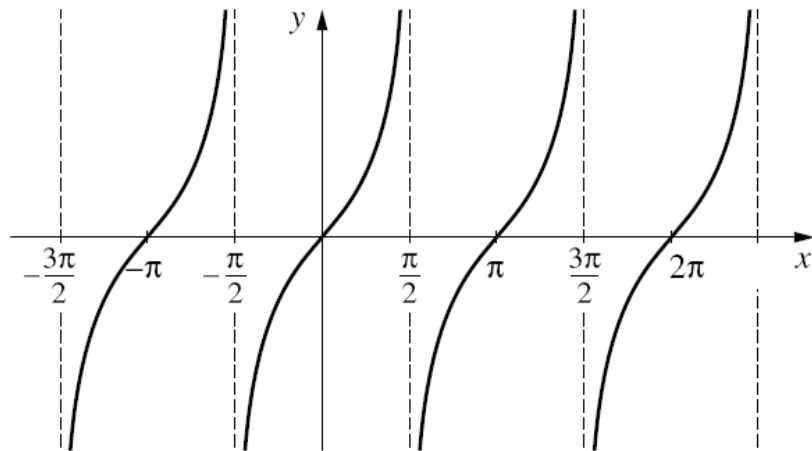
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$



Sini- ja kosinifunktion
määrittelyjoukko on $\mathbb{R}$.
Arvojoukko on $[-1, 1]$.

Sini- ja kosinifunktion
jakso on 2π

Tangenttifunktion jakso

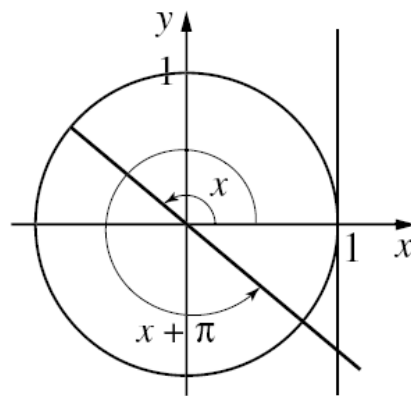


Tangenttifunktion
määrittelyehto:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Tangenttifunktion arvojoukko on $\mathbb{R}$.

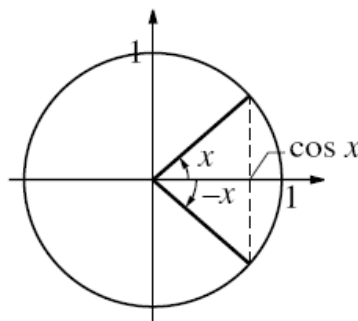
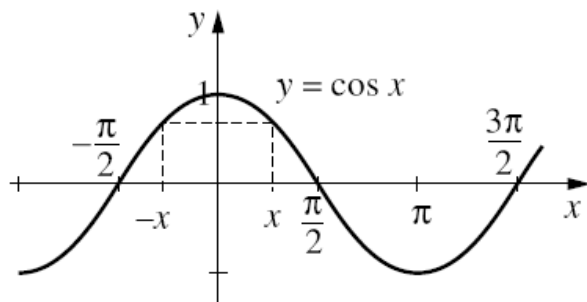
$$\tan(x + \pi) = \tan x$$



Tangenttifunktion jakso on π , sillä kulmilla x ja $x + \pi$ on sama tangentialpiste.

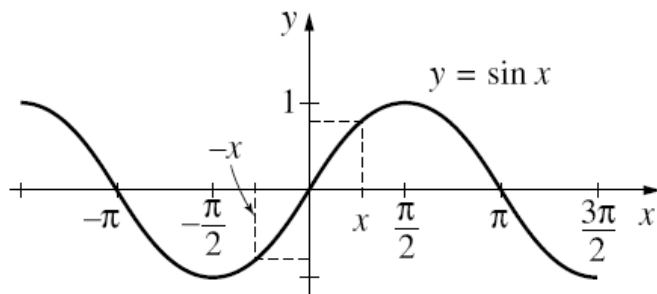
Symmetriat

Kulma ja vastakulma

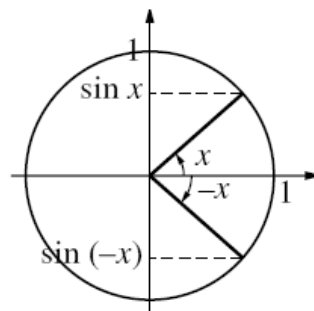


$$\cos(-x) = \cos x$$

Kosini on *parillinen funktio*: $f(-x) = f(x)$

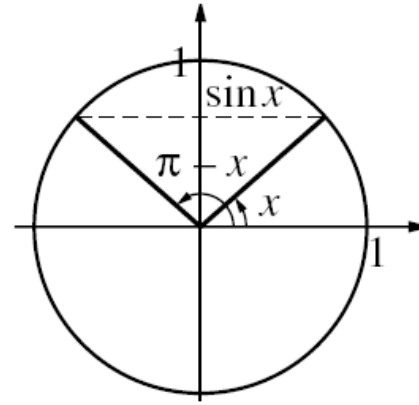
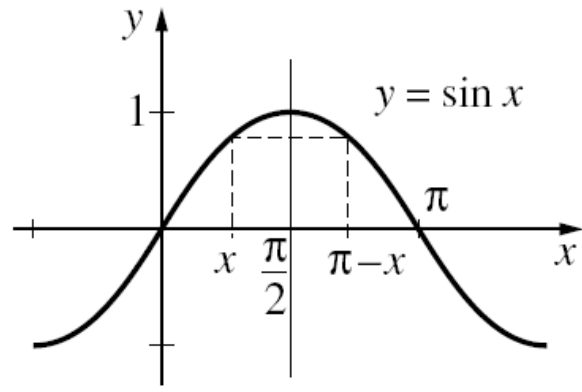


$$\sin(-x) = -\sin x$$

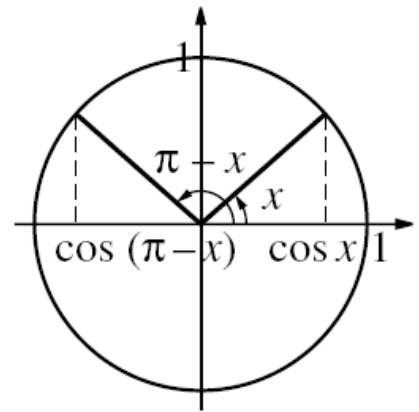
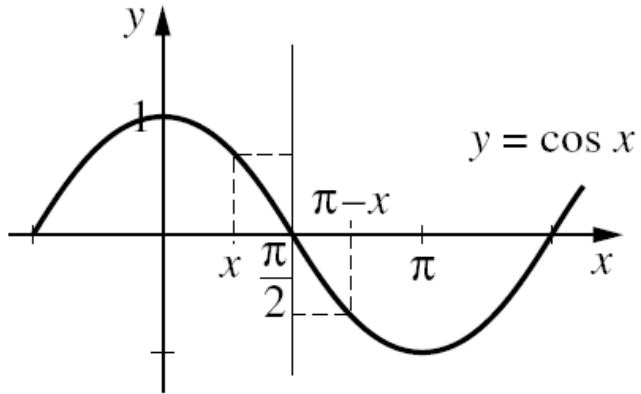


Sini on *pariton funktio*: $f(-x) = -f(x)$

Kulma ja suplementtikulma



$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

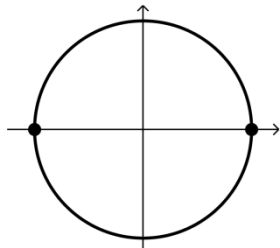


$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

Trigonometrinen perusyhtälöiden ratkaisuja yksikköympyrän avulla

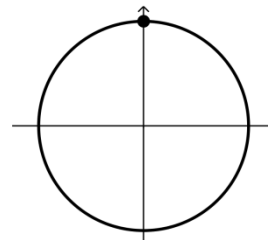
$$\sin x = 0$$

$$x = n\pi$$



$$\sin x = 1$$

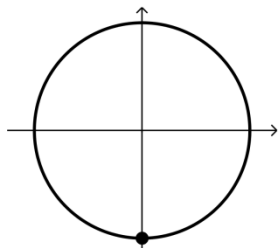
$$x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$$



$$\sin x = -1$$

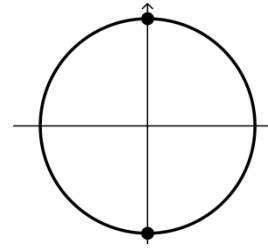
$$x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$$

$$\text{tai } x = \frac{3}{2}\pi + n2\pi$$



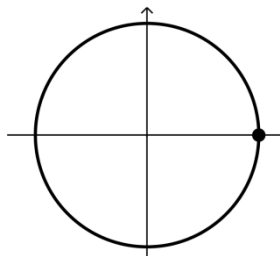
$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$



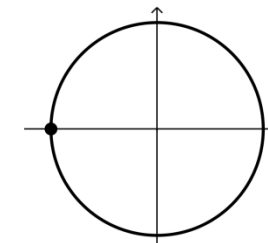
$$\cos x = 1$$

$$x = n2\pi$$



$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + n2\pi$$



Kaikissa ratkaisussa $n \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki: Ratkaise yhtälö $\sin x = 2 \sin^2 x$.

$$\sin x = 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

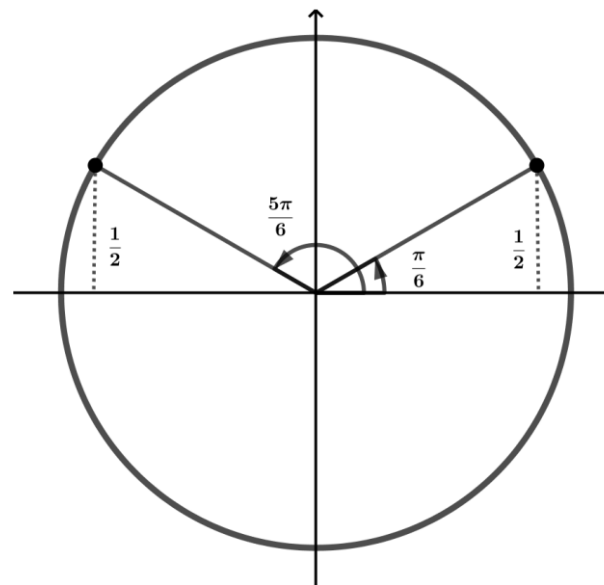
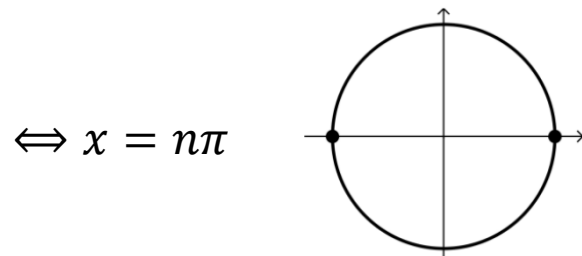
$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$$

$$\text{tai} \quad x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$$

$$n \in \mathbb{Z}$$



Vastaus: $x = n\pi, x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ tai $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$