

Pitkän matematiikan ylioppilaskoe

Yleisiä ohjeita

K2023

Kokeen rakenne

- Kokeessa on *13 tehtävää*, joista vastataan *enintään 10 tehtävään*.

Osa	Tehtäviä annetaan	Kokelas vastaa
A	4	4
B1	5	3
B2	4	3

- A-osan aikana saa käyttää esim. SpeedCrunch-laskinohjelmaa, mutta graafiset toiminnot ja taulukko- sekä CAS-laskenta (mm. Geogebra, TI-Nspire ja LibreOffice Calc) eivät ole käytössä.
- A-osan palauttamiseen ei ole erillistä aikarajaa.

Apuvälineet

- Ota mukaan vastausten luonnostelua varten lyijykynä, pyyhekumi ja viivoitin. Kolmioviivoittimesta ja harpistakin voi olla hyötyä A-osassa ja mallikuvioiden laatimisessa suttupaperille.
 - Suttupaperia kannattaa ehdottomasti käyttää ratkaisujen luonnostelussa
 - Harjoittele vielä suttupaperin käyttöä ennen koetta!
- Kokeeseen ei saa tuoda erillisiä laskimia eikä taulukkokirjoja.
- Muista hyvät eväät!

2.1. Sievennä lauseke $(2x)^5(-4x)^{-1}$, kun $x \neq 0$. **2 p.**

Vastaus:

A-osa

- Muista riittävät välivaihteet ja perustelut myös A-osassa.
- Ole tarkkana laskusääntöjen kanssa! (E erityisesti sievennykset ja lausekkeen arvon laskemiset.)
- Etsi sopiva kaava koejärjestelmän taulukkokirjasta.
- *Tarkista yhtälöt sijoittamalla ratkaisut alkuperäiseen yhtälöön (SpeedCrunch)*
- Tarkkana muistikaavojen kanssa!

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm \mathbf{2ab} + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

A-osa

- Varo tyypillisiä virheellisiä laskutapoja (esim. summalausekkeissa)

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Vrt. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

- $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

- $\log(x+y) \neq \log x + \log y$ jne.

$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

- $D(fg) \neq f'g'$

$Dfg = f'g + g'f$

- **Myös sievennyksiä voi tarkistaa sijoittamalla lukuja alkuperäiseen ja lopulliseen lausekkeeseen!**

– Oletko aivan varma, että välivaihe on laskusääntöjen mukainen? Testaa nämäkin sijoittamalla lukuja lausekkeisiin!

A-osa

- Tarkista laskut sekä heti laskettuasi, että vielä ennen palautusta.
 - Lasku- tai ajatusvirhe voi toistua tarkistusvaiheessa, mutta ei ehkä niin todennäköisesti kun palaat tehtävään myöhemmin.
- Tarkistamiseen olisi syytä jäädä riittävästi aikaa, vähintään 20 minuuttia.
 - A-osaan käytettävä optimaalinen aika vaihtelee varmasti kokeesta ja kokelaasta riippuen paljonkin, mutta hyvä arvio olisi ehkä n. 2-2,5h.
- Arvioi yleisesti vastausten järkevyyttä
- Älä käytä enää aikaa A-osan ratkaisujen tutkimiseen ja jossitteluun kun olet saanut laskinohjelmistot käyttöösi!
- Toisaalta B-osaa voi kannattaa silmäillä ja ehkä hieman laskeakin ennen A-osan palautusta.

B-osa

- Lue tehtävänanto aina huolellisesti läpi ennen vastaamista.
 - Vastaatko varmasti siihen, mitä tehtävässä kysytään?
- Vähänkään vaikeampaa tehtävää kannattaa ensin hahmotella suttupaperille ja esim. tutkia tilannetta GeoGebralla.
 - Jos ratkaisusi perustuu vain GeoGebran käyttöön muista kertoa selkeästi miten piirsit tarkan mallikuvion. Yleensä pelkästään piirtämällä saatu ratkaisu ei riitä täysiin pisteisiin, ellei tehtävässä toisin sanota. (Paitsi esim., S2020/6, ks. HVP)
- Silmäile tehtävät ensin läpi ja mieti mihin tehtäviin aiot vastata.
- Jos lasku ei edisty n. 20 minuutissa, kannattaa siirtyä toiseen tehtävään.
- *Vastaa oikeaan määrään tehtäviä!*
 - Jos vastaat liian moneen kysymykseen, niin B-osiossa lopullinen pistemäärä muodostuu niistä kolmesta tehtävästä, joiden pistesumma on pienin.

B-osa

- Muista, että kokeilemalla löydetty ratkaisu ei kelpaa ilman perusteluja.
- Kuitenkin kokeilemalla löydetty ratkaisu kelpaavat, jos pystyt osoittamaan, että muita ratkaisuja ei ole.
 - S2022/8, jossa voidaan päätellä millä välillä kokonaisluvut ovat ja testata kaikki. (Parempi tapa on kuitenkin muokata lauseketta muistikaavoja soveltamalla)
- Kokeessa voi olla simulointitehtävä (todennäköisyyslaskenta).
 - Ohjelmointitaidot eivät silti ole välttämättömiä, simuloinnin voi melko varmasti tehdä myös taulukkolaskennalla (K2021/8)
- Tunnista todennäköisyyslaskennan tehtävätyyppi
 - Onko **toistokoe**? Jos on, niin **binomijakaumaa** voi käyttää (GeoGebran laskuri!).
 - Jos tehtävässä kohtuullinen määrä vaihtoehtoja, voit taulukoida ne kaikki
 - Tyypillisessä tehtävässä kerto- ja yhteenlaskusääntöjen hallinnalla pärjää pitkälle

Vastaamisesta yleisesti

- Pelkkä vastaus ei riitä suoritukseksi. *Kerro mitä lasket!*
- **Älä anna pyöristettyjä vastauksia, jos lähtöarvot eivät ole likiarvoja!**
- **Muista funktioiden (ja lausekkeiden) määrittelyehdot**
- *Muista perustella ratkaisun välivaiheet.*
 - Lyhyt sanallinen selitys yleensä riittää
 - Funktion kulun perusteluna usein kulkukaavio
 - Muista merkitä testipisteet ja todeta myös sanallisesti kulkukaaviosta havaittujen ääriarvojen laatu
- Selkeä ja riittävän iso kuvio auttaa usein tehtävän ratkaisussa ja toimii myös tarkistuskeinona (esim. kulmat voi tarkistaa GeoGebralla tai suttupaperilta kolmioviivoittimella).

Laskinohjelmiston käytöstä

- Tarkennus laskinohjeeseen (ylioppilastutkinto.fi, 1.12.2015)
- ”Matematiikan tehtävän vastaus koostuu väitteistä ja niiden perusteluista. **Laskinta saa käyttää minkä tahansa väitteen aikaansaamisessa, mutta laskin ei muodosta koskaan väitteen perustelua.** Se, mikä väite vaatii perustelun riippuu asiayhteydestä. Jos tehtävässä pyydetään *osoittamaan, todistamaan tai perustelemaan* jotain, ei laskimen antama tulos ole koskaan yksinään riittävä. Laskimen antama tulos voi kuitenkin muodostaa perustelun osan:”

Esimerkki. Osoita, että funktio $f(x) = 3x + \sin x$ on kasvava.

HYVÄ RATKAISU. Derivoituva funktio on kasvava jos sen derivaatta on ei-negatiivinen (*Perustelu*). Funktion derivaatta on $f'(x) = 3 + \cos x$ (*Lasku*). Koska $3 + \cos x \geq 3 - 1 = 2$ aina, on derivaatta ei-negatiivinen, ja siten funktio f on kasvava (*Perustelu*).

Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ derivaatan nollakohdat.

HYVÄ RATKAISU. Koska $f'(x) = x^2 + x - 2$, niin saamme toisen asteen yhtälön $x^2 + x - 2 = 0$ jonka ratkaisut, ja samalla derivaatan nollakohdat, ovat 1 ja -2 .

PUUTTEELLINEN RATKAISU. Koska $f'(x) = x^2 + x - 2$, niin $x = 1$ tai $x = -2$. (*Ratkaisussa ei kerrota miten lausekkeesta $x^2 + x - 2$ saadaan $x = 1$ tai $x = -2$, eli yhtälön muodostaminen on jätetty lukijan arvattavaksi.*)

Ratkaisusta on aina käytävä ilmi mitä on laskettu!

Laskinohjelmiston käytöstä

- Hyödynnä laskinohjelmistojen toimintoja B-osassa!
- Älä käytä aikaa ”kaavanpyörittelyihin”, ellei tehtävässä vaadita erikseen välivaiheita.
 - Ratkaise yhtälöt, yhtälöparit ja epäyhtälöt solve-toiminnolla.
 - Lisäksi graafisesta tarkistuksesta voi olla hyötyä. (Onko muodostamani funktio järkevä?)
- Käytä apuna sijoitustoimintoa ja omia funktioita (TI-Nspire, SpeedCrunch)
 - Funktion arvojen laskeminen (esim. testipisteet)
 - Derivointi ja solve: Aikaa säästyy, kun lauseketta ei tarvitse kirjoittaa uudestaan ja näppäilyvirheet vähenevät
- Muista tilasto- ja taulukkolaskentatoiminnot, geometrinen kuvien piirtäminen tarkasti sekä käyrän sovittaminen GeoGebralla!

Lopuksi

- Jos aikaa on, mutta tuntuu siltä, että enempään ei osaa vastata:
 - Pidä luova tauko, liiku (eli käy vessassa) syö eväitä ja lepäile hetki.
 - *Osa tehtävistä on tarkoituksella ongelmanratkaisukykyä testaavia ja eivät välttämättä vaadi laajoja pohjatietoja.*
 - *Lähde rohkeasti testaamaan ja hyödyntämään tehtävänannon tietoja.*
 - Taulukkokirjaa tutkimalla voi löytää idean tai sopivan kaavan tehtävään.
- Vastaa täsmälleen kymmeneen tehtävään!
 - Vaikeimmissakin tehtävissä on usein muutamia irtopisteitä tarjolla.
 - Usein helppo 1. kohta, jota jollain tavalla sovelletaan jatkossa.
- Muista vielä tarkistaa, jos aikaa jää. Käytä koko aika!

Harjoiteltavaa

- A-osan 1. tehtävä on todennäköisesti monivalintatehtävä tai lyhyt vastaus automaattisella tarkistuksella.
 - SpeedCrunch voi antaa ilmaisia pisteitä.
 - Käy läpi kaikki ykköstehtävät K2019-S2022!
- A-osan 2. tehtävä luultavasti nopeasti ratkaistavissa peruslaskusäännöillä (vektorit, logaritmit, perusyhtälöt)
 - Hyödynnä taulukkokirjaa!
 - Laske K2019/2 tai K2021/2
- Tehtävät 3. ja 4. voivat olla työläitä ja testata monen kurssin sisältöjä:
 - Funktioiden kulun tutkiminen syytä osata, integraalit myös!
 - Laske S2021/3 ja/tai hieman vaativammat K2020/3 sekä K2020/4

- B-osassa CAS-laskenta säästää reilusti aikaa
 - Harjoittele vielä GeoGebran ja/tai TI-Nspiren käyttöä!
 - Laske **K2020/6** (analyttinen geometria + derivaatta)
 - Hyvä, mutta vaativampi analyttisen geometrian tehtävä: **S2020/12**
- Yksi tehtävätyyppi on vaadittavan ehdon toteuttavan esimerkin (funktion) laatiminen. Näissä GeoGebrasta on todennäköisesti paljon hyötyä. (**K2019/7**)
- Toisaalta kokeessa on varmasti tehtäviä, joissa laskinohjelmista ei ole juurikaan mitään apua:
 - Suttupaperi avuksi ja rohkeasti annettuja tietoja hyödyntämään!
 - **K2021/11 (2. kohta)**
 - Suuret luvut, jaollisuus ja todistustehtävät:
 - K2021/11 (1. kohta), S2019/8, K2019/8, S2020/9