

K2020/4: 4. Suurin etäisyys 12 p.

Piste (x, y) toteuttaa epäyhtälön $x^4 + y^2 \leq 1$. Määritä pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta.

Pisteen (x, y) etäisyys origosta saadaan lausekkeella $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Etäisyys on suurin kun juurrettava, merkitään $f(x, y) = x^2 + y^2$, on suurin.

Kauimpana origosta sijaitsevat pisteet ovat tasoalueen $x^4 + y^2 \leq 1$ reunalla eli käyrällä $x^4 + y^2 = 1$. (Jos olisi $x^4 + y^2 < 1$, niin koordinaattien neliöt eivät olisi suurimpia mahdollisia.)

Sijoittamalla $y^2 = 1 - x^4$ saadaan yhden muuttujan funktio

$$f(x) = x^2 + 1 - x^4.$$

Tässä $-1 \leq x \leq 1$, koska muuten $x^4 + y^2 > 1$ (y :stä riippumatta).

Funktio f on polynomifunktiona derivoituva, joten sen suurin arvo löytyy joko suljetun välin päätepisteistä, tai derivaatan nollakohdista tällä välillä.

Derivoidaan ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 2x - 4x^3.$$

$$f'(x) = 2x(1 - 2x^2) = 0$$

Tulon nollasäännön perusteella:

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tutkitaan sijoittamalla missä kohdassa suurin arvo saavutetaan:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 - (-1)^4 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{4}$$

$$f(1) = 1$$

SpeedCrunch:

$$f(x) = x^2 + 1 - x^4$$

$$g(x) = 2x - 4x^3$$

$$g(1/\sqrt{2}) = 0$$

$$f(-1) = 1$$

$$f(1/\sqrt{2}) = 1,25$$

Funktion f suurin arvo tarkasteluvälillä on siis $5/4$, joten pisteen (x, y) suurin mahdollinen etäisyys origosta on

$$\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\approx 1,118)$$