

K2020/3 Pinta-alan ääriarvo 12 p.

1. Laske integraali $\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$. (3 p.)

2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? (9 p.)

$$1. \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = -\frac{2}{\pi}(\cos \pi - \cos 0) = -\frac{2}{\pi}(-1 - 1) = \frac{4}{\pi}$$

Integrointi on helpointa sopivan *integraalifunktioehdokkaan* avulla:

Tiedetään, että $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ja sisäfunktio säilyy integroitaessa (kuten derivoitaessakin).

Integraalifunktioehdokas on siis $-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Määritetään kerroin eteen derivoimalla:

$$D\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Kerroin $\frac{\pi}{2}$ kumotaan käänteisluvulla $\frac{2}{\pi}$. Siis integraalifunktio on $-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

2. Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittamasta alueesta leikataan pystysuora kaistale suorilla $x = t$ ja $x = t + \frac{1}{2}$. Millä parametrin arvolla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ kaistaleen pinta-ala on suurin mahdollinen? (9 p.)

2. Parametrin t arvoilla $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ integroimisväli kuuluu joukkoon $[0, 2]$ ja $\frac{\pi}{2}x$ vaihtelee välillä $[0, \pi]$. Tällöin sinifunktio on epänegatiivinen, joten pinta-ala A saadaan integraalina

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_t^{t+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = -\frac{2}{\pi} \left/ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|_t^{t+\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Derivoituvan funktion A suurin arvo suljetulla välillä $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ löytyy joko välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdista tällä välillä.

Derivoidaan: $A'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}t + n2\pi \quad \text{tai} \quad \frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2}t + n2\pi$$

$$\frac{\pi}{4} = n2\pi$$

$$n = \frac{1}{8}$$

$$\pi t = \frac{3}{4}\pi + n2\pi$$

$$t = \frac{3}{4} + 2n$$

Ei ratkaisua, kun $n \in \mathbb{Z}$

Välillä $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ ainoa ratkaisu on $t = \frac{3}{4}$.

Lasketaan pinta-alat derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä. Sijoitetaan SpeedCrunch:lla nämä kohdat pinta-alan funktioon $A(t) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$A(x) = 2/\pi * \cos(\pi/2 * x) - 2/\pi * \cos(\pi/2 * x + \pi/4)$$

$$A(0) \\ = 0,1864616142890283083$$

$$A(3/4) \\ = 0,48724767920221632256$$

$$A(3/2) \\ = 0,1864616142890283083$$

Pinta-alan arvo $A\left(\frac{3}{4}\right)$ on suurin.

Vastaus: Parametrin arvolla $t = \frac{3}{4}$.