

Polynomien jaollisuus

- Oletetaan, että polynomien jakolaskun $P(x) : S(x)$ osamäärä on $Q(x)$ ja jakojäännös $R(x)$. Silloin

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

- Jos jako menee tasan eli $S(x)$ on polynomin $P(x)$ tekijä, sanotaan, että polynomi P on jaollinen polynomilla S .

Polynomien jaollisuus

- Jakolaskun $P(x)$: $(x - a)$ jakojäännös on yhtä suuri kuin polynomin $P(x)$ arvo $P(a)$.

– Todistus:

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r$$

Sijoitetaan $x = a$

$$P(a) = (a - a)Q(a) + r$$

$$P(a) = 0 \cdot Q(a) + r$$

$$P(a) = r$$

Polynomien jaollisuus

- Jakolasku $P(x)$: $(x - a)$ menee tasan eli binomi $x - a$ on polynomin $P(x)$ tekijä, jos ja vain jos $P(a) = 0$.
- Meneekö jakolasku $(x^4 + 3x^2 - 64)$: $(x + 4)$ tasan?
 - Nyt $(x + 4) = (x - (-4))$ eli lasketaan polynomin arvo kohdassa -4 .
 $P(-4) = (-4)^4 + 3 \cdot (-4)^2 - 64 = 0$ eli jakolasku menee tasan.

Polynomien jaollisuus

- n . asteen polynomilla on enintään n nollakohtaa.
 - Sama nollakohta voi esiintyä useamman kerran.
Esim. polynomilla $x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x + 2)(x + 2)(x - 3)$ on kaksinkertainen nollakohta -2 .

Polynomien jaollisuus

- Jos n . asteen polynomilla P on n nollakohtaa x_1, x_2, \dots, x_n , missä moninkertaiset nollakohdat esiintyvät niin monta kertaa kuin niiden kertaluku ilmaisee, niin
$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n),$$
missä a on polynomin korkeimman asteen termin kerroin.

Polynomien jaollisuus

- Jaa tekijöihin polynomi

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6.$$

Kuvaajan perusteella polynomilla

on nollakohdat $-2, \frac{1}{2}$ ja 3 .

$$\begin{aligned} P(-2) &= 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 11 \cdot (-2) + 6 \\ &= -16 - 12 + 22 + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ ja } P(3) = 0.$$

-> nollakohdat ovat $-2, \frac{1}{2}$ ja 3 .



Koska korkeimman termin $2x^3$ kerroin on kaksi,

$$P(x) = 2(x - (-2)) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 3)$$

$$= 2(x + 2) \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 3)$$

$$= (x + 2)(2x - 1)(x - 3)$$

Kerrotaan
 $(x - \frac{1}{2})$
kertoimella 2.

Vastaus: $P(x) = (x + 2)(2x - 1)(x - 3)$