MAA12 (Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä)

Välitesti 5 - Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta.
Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!
Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Olkoon $f(x)=\ln(2x)$. Laske derivaatan $f'(e)$ likiarvo

   a) ”h”-erotusosamäärän avulla, kun $h=0{,}1$ (2p.)

   b) keskusdifferenssin (”2h”-muodon) avulla, kun $h=0{,}1$ (2p.)

   Ratkaisu:

   a) $f'(e)\approx\dfrac{f(e+h)-f(e)}{h}=\dfrac{\ln(2(e+0{,}1))-\ln(2e)}{0{,}1}=$

   $\dfrac{\ln 2+\ln(e+0{,}1)-\ln 2-\ln e}{0{,}1}=\dfrac{-1+\ln(e+0{,}1)}{0{,}1}=0{,}361274...\approx 0{,}3613.$ **(2p.)**

   b) $f'(e)\approx\dfrac{f(e+h)-f(e-h)}{2h}=\dfrac{\ln(2\cdot(e+0{,}1))-\ln(2\cdot(e-0{,}1))}{2\cdot 0{,}1}=$

   $\dfrac{\ln 2+\ln(e+0{,}1)-(\ln 2+\ln(e-0{,}1))}{0{,}2}=\dfrac{\ln(e+0{,}1)-\ln(e-0{,}1)}{0{,}2}=0{,}368045533...\approx 0{,}3680.$

   (2p.)

2. Laske määrätyn integraalin $\int_3^4 \ln(\pi x)dx$ likiarvo puolisuunnikassäännöllä ja jakamalla integroimisväli neljään yhtä suureen osaväliin. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella. (4p.)

   $\int_3^4 \ln(\pi x)dx\approx 0{,}25\cdot(\frac{1}{2}\cdot f(3)+f(3{,}25)+f(3{,}5)+f(3{,}75)+\frac{1}{2}\cdot f(4))=$

   $0{,}25\cdot(\frac{1}{2}\cdot\ln(\pi\cdot 3)+\ln(\pi\cdot 3{,}25)+\ln(\pi\cdot 3{,}5)+\ln(\pi\cdot 3{,}75)+\frac{1}{2}\cdot\ln(\pi\cdot 4))$

   $=2{,}3936...\approx 2{,}394.$

Vastaus: 2,394. **(4p.)**

3. Funktio θ (x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$ on standardoitu normaalijakautuma N(0,1). Määrää Simpsonin säännöllä integraalin arvo $\int_{-1}^{2} \theta(x)dx$. Käytä kuutta jakoväliä. (4p)

Ratkaisu:

Osavälin pituus $h = \frac{2-(-1)}{6} = 0.5$. Simpsonin säännöllä saadaan integraalin arvon likiarvoksi

$$\frac{0,5}{3}\,(\,\theta(-1) + 4\theta(-0,5) + 2\theta(0) + 4\theta(0,5) + 2\theta(1) + 4\theta(1,5) + \theta(2))$$

$$\approx \frac{0,5}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-(-1)^2/2} + 4e^{-(-0,5)^2/2} + 2e^{-(0,0)^2/2} + 4e^{-(0,5)^2/2} + 2e^{-(1,0)^2/2} + 4e^{-(1,5)^2/2} + e^{-(2,0)^2/2})$$

$\approx$0,81873… $\approx$0,8187

Vastaus: 0,8187. **(4p)**