

MAA12 (Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä)

Välitesti 4 - Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohteen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta.

Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. a) Osoita että funktiolla $f(x) = x^4 + x - 1$ on nollakohta välillä $[0,1]$ (2p.)

Ratkaisu: Kyseessä on jatkuva funktio (polynomi), joka saa välin päätepisteissä arvot $f(0) = 0^4 + 0 - 1 = -1$ ja $f(1) = 1^4 + 1 - 1 = 1$, joten Bolzanon lauseen nojalla funktiolla on nollakohta välillä $]0,1[$. (2 p.)

- b) Ratkaise nollakohta yhden desimaalin tarkkuudella puolitusmenetelmällä. (2p.)

Ratkaisu:

Puolitetaan väli $[0,1]$

$$f(0,5) = 0,0625 + 0,5 - 1 = -0,4375$$

Puolitetaan väli $[0,5;1]$

$$f(0,75) = 0,0625 + 0,5 - 1 = 0,06640625$$

Puolitetaan väli $[0,5;0,75]$

$$f(0,625) = -0,222412109375$$

Puolitetaan väli $[0,625;0,75]$

$$f(0,6875) \approx -0,089$$

Nollakohta on siis välillä $]0,6875;0,75[$. Koska kaikki välin arvot pyörivät yhden desimaalin tarkkuudella samaan arvoon, on **vastaus: 0,7**. (2p.)

2. Ratkaise Newtonin menetelmällä funktion $f(x) = x^4 + x - 1$ välillä $[0,1]$ oleva nollakohta 9 desimaalin tarkkuudella. (4p.)

Ratkaisu:

Derivoidaan: $f'(x) = 4x^3 + 1$

Alkuarvaus: $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = \frac{1393}{1905}$$

$$x_3 = 0,72454848001147$$

$$x_4 = 0,72449196299104$$

$$x_5 = 0,7244919590005$$

$$x_6 = 0,72449195900052$$

Näyttäisi siltä että nollakohta 9 desimaalin tarkkuudella on $x \approx 0,724491959$.

Tarkistetaan tulos laskemalla funktion arvot

$$f(0,7244919595) > 0$$

$$f(0,7244919585) < 0$$

Nyt, koska kyseessä on jatkuva funktio, voidaan Bolzanon lauseen nojalla todeta että nollakohta on välillä $]0,7244919585; 0,7244919595[$. Koska kaikki välin arvot pyörivät samaan 9-desimaalin tarkkuuteen, on vastaus: $x \approx 0,724491959$ **(4p.)**

3. Ratkaise iteroimalla funktion $f(x) = x^4 + x - 1$ välillä $[0,1]$ oleva nollakohta 9 desimaalin tarkkuudella. **(4p.)**

Ratkaistaan x yhtälöstä $f(x) = 0$:

$$x = 1 - x^4$$

Iteroitavana funktiona toimii siis $g(x) = 1 - x^4$

$$\text{Alkuarvaus: } x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = g(x_0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,9375$$

$$x_2 = g(x_1) = 1 - 0^4 = 1$$

Huomataan, että iterointi ei suppene (riippumatta alkuarvauksesta). **Yritetään vielä toista muotoa** iteroitavalle funktiolle:

Ratkaistaan x yhtälöstä $f(x) = 0$:

$$x^4 = 1 - x$$

$$x = \pm \sqrt[4]{1 - x}$$

Koska haettu nollakohta x on positiivinen, hylätään negatiivinen juuri. $g(x) = \sqrt[4]{1 - x}$

Alkuarvaus: $x_0 = \frac{1}{2}$

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt[4]{1 - \frac{1}{2}} \approx 0,84089641525$$

$$x_2 = g(x_1) \approx 0,63156781668097$$

$$x_3 \approx 0,77909315717133 \quad (\text{laskimella....})$$

⋮

$$x_{35} \approx 0,72449204424094$$

$$x_{36} \approx 0,72449190296222$$

⋮

$$x_{67} \approx 0,72449195900065$$

$$x_{68} \approx 0,72449195900043$$

vastaus: $x \approx 0,724491959$ (oikea tarkkuus perusteltiin jo tehtävässä 2) **(4p.)**