Jonot ja raja-arvot

- Lukujono (tai jono) muodostuu peräkkäisistä jonon jäsenistä.
- Jonon jäseniä merkitään kirjaimella ja alaindeksillä, esim. $a_1, a_2, a_3, \ldots$
- Esim. $1, 2, 3, \ldots$ tai $3, 9, 27, \ldots$
- Lukujonolla on usein sääntö, jonka avulla sen jäsenet voidaan laskea.
- Esim. $1, 2, 3$ ... voidaan ilmoittaa säännön

$a_n = n$ avulla ja $3, 9, 27, \ldots$ säännön $b_n = 3^n$

Jonot ja raja-arvot

- Jonon 1, 2, 3,… eli jonon $a_n = n$ jäsenet kasvavat rajatta, kun n kasvaa rajatta. (Lukujonolla ei ole raja-arvoa.)
- Sen sijaan lukujonon $b_n = \frac{1}{n}$ eli $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ jäsenet lähenevät lukua 0, kun n kasvaa rajatta. Sanotaan, että jono suppenee ja sen raja-arvo on 0.
- Raja-arvo voidaan merkitä kahdella tavalla:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ \text{ tai } \ \frac{1}{\mathrm{n}} \to 0, \text{kun } n \to \infty$$

”lim” luetaan limes

- Tällä kurssilla raja-arvoja määritetään numeerisesti laskemalla jonon jäsenien a_n arvoja yhä suuremmilla n:n arvoilla.

- Esim. Olkoon $a_n = \frac{5n-7}{1+3n}$

n	a_n
1	-0,5
10	1,387096774
100	1,637873754
10 000	1,666377787
100 000	1,666663778
10^{10}	1,666666666

Raja-arvo on noin 1,666666666.

Laskimella:

```
define g(x)=(5x-7)/(1+3x)
                              done
g(1)
                              -0.5
g(10)
                       1.387096774
g(100)
                       1.637873754
g(10000)
                       1.666377787
g(1000000)
                        1.66663778
g(10^10)
                        1.66666666
```

Jonot ja raja-arvo

- Funktion raja-arvon määrittämisestä on hyötyä kohdissa, joissa funktio ei ole määritelty.
- Esim. Funktiota $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x = 2$. Tutkitaan funktion käyttäytymistä luvun 2 ympäristössä laskemalla sen arvoja taulukkoon.

$\boldsymbol{x}$ (positiivinen suunta)	$\boldsymbol{f}(x)$	$\boldsymbol{x}$ (negatiivinen suunta)	$\boldsymbol{f}(x)$
2,5	4,5	1,5	3,5
2,1	4,1	1,9	3,9
2,01	4,01	1,99	3,99
2,001	4,001	1,999	3,999

- Taulukon perusteella näyttää siltä, että lähestyttäessä muuttujan arvoa 2 sekä positiiviselta että negatiiviselta suunnalta, funktion arvot lähestyvät arvoa 4. Funktiolla on raja-arvo 4 kohdassa $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$