

Funktion nollakohdat

Bolzanon lause:

Jos jatkuvan funktion arvot ovat välin $[a, b]$ päätepisteissä erimerkkiset, funktiolla on nollakohta välillä $]a, b[$.

- Huom! Lause takaa sen, että funktiolla on ainakin yksi nollakohta. Nollakohtien määrä on tutkittava ja perusteltava esimerkiksi funktion kulun avulla.

Esimerkki

Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 - 2x + 2$ on täsmälleen yksi nollakohta.

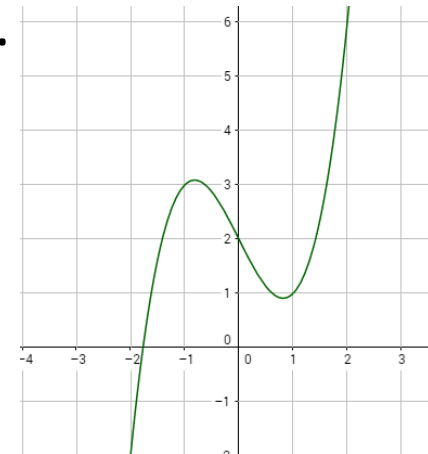
Kuviosta nähdään, että funktiolla f on nollakohta välillä $] -2, -1[$. Todistetaan tämä Bolzanon lauseen avulla.

Funktio on polynomifunktiona jatkuva.

Funktion arvot välin $[-2, -1]$ päätepisteissä ovat:

$$f(-2) = -2 < 0$$

$$f(-1) = 3 > 0$$



Päätepistearvot ovat erimerkkiset, joten funktiolla on Bolzanon lauseen nojalla nollakohta välillä $] -2, -1[$.

Tutkitaan funktion kulkua.

$$\text{Derivoidaan: } f'(x) = 3x^2 - 2$$

Derivaatan nollakohdat:

$$3x^2 - 2 = 0$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \approx \pm 0,816$$

Piirretään kulkukaavio

		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	
$f'(x)$	+		-		+
$f(x)$	↗		↘		↗

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 1 \\ f'(0) &= -2 \\ f'(1) &= 1 \end{aligned}$$

Koska funktio on kasvava välillä $] -2, -1 [$, sillä voi olla vain yksi nollakohta tällä välillä.

Polynomifunktio voi vaihtaa suuntaansa vain derivaatan nollakohdassa. Koska funktion paikallinen minimi on kohdassa $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ja siinä funktion arvo $f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0,911 \dots$ on positiivinen, funktiolla ei ole muita nollakohtia.

Funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta.

Puolitusmenetelmä

- Funktion nollakohdan tarkkaa arvoa voidaan etsiä haarukoimalla. Kun ollaan löydetty jokin väli, jonka päätepisteissä funktion arvot ovat erimerkkiset, ruvetaan pienentämään väliä kokeilemalla uusia pisteitä välin sisällä.

Esimerkki

- Määritä funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ nollakohdan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella. Nollakohta on välillä $] -2, -1[$.

$$f(-2) = -2 < 0$$

$$f(-1) = 3 > 0$$

Kokeillaan arvoa $x = -1,9$

$$f(-1,9) = -1,059 < 0, \text{ joten ratkaisu on suurempi kuin } -1,9.$$

Kokeillaan arvoa $x = -1,8$

$$f(-1,8) = -0,232 < 0, \text{ joten ratkaisu on suurempi kuin } -1,8.$$

Kokeillaan arvoa $x = -1,7$

$$f(-1,7) = 0,489 > 0, \text{ joten ratkaisu on välillä }] -1,8; -1,7[.$$

Valitaan pisteitä niin, että saadaan väli, jossa toisessa päätepisteessä funktion arvo on negatiivinen ja toisessa positiivinen.

Selvitetään, kumpi arvoista on oikea likiarvo.

$$f(-1,75) = 0,140625 > 0, \text{ joten ratkaisu on välillä }] -1,8; -1,75[.$$

Nollakohdan arvo pyöristyy lukuun $-1,8$.

Puolitusmenetelmä

- Puolitusmenetelmä on haarukointitapa, jossa uudeksi pisteeksi valitaan aina välin keskipiste.
- Puolitusmenetelmä ei ole kovin tehokas, mutta se on varma menetelmä ja lisäksi siitä saa algoritmin.

Esimerkki

- Määritä funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$ nollakohdan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella. Nollakohta on välillä $] -2, -1[$.

Taulukoidaan puolitusmenetelmän kulku:

funktion arvot	ratkaisu välillä	välin keskipiste
$f(-2) = -2 < 0$		
$f(-1) = 3 > 0$	$] -2, -1[$	$-1,5$
$f(-1,5) = 1,625 > 0$	$] -2; -1,5[$	$-1,75$
$f(-1,75) \approx 0,141 > 0$	$] -2; -1,75[$	$-1,875$
$f(-1,875) \approx -0,842 < 0$	$] -1,875; -1,75[$	$-1,8125$
$f(-1,8125) \approx -0,329 < 0$	$] -1,8125; -1,75[$	

Ratkaisu on yhden desimaalin tarkkuudella $-1,8$.