

MAA11 (Lukuteoria ja todistaminen)

Välitesti 2 - Ratkaisut ja pisteytysohjeet

Tarkista ja pisteytä vihkoon tekemäsi välitesti tämän ratkaisuohtjeen avulla. Epäselvissä kohdissa kysy apua opettajalta.

Mieti sitten, oletko valmis jatkamaan eteenpäin vai pitäisikö vielä kerrata!

Välitestin maksimipistemäärä on 12.

1. Olkoon $R(x, y)$ avoin lause "x rakastaa y:tä". Perusjoukko on tietty ihmisryhmä. Suomenna seuraavat lauseet

a) $\forall y R(\text{Ville}, y)$. "Ville rakastaa kaikkia" (1 p.)

b) $\exists x \neg R(x, \text{Ville})$. "On olemassa joku, joka ei rakasta Villeä" (1 p.)

c) $\forall y \exists x R(x, y)$. (3 p.) "Jokaisella on joku, joka rakastaa sitä" (1 p.)

2. Todista lause: Kun lisäät minkä tahansa parittoman luvun neliöön luvun 5 saat vastaukseksi aina parillisen luvun. (3 p.)

Oletus: Olkoon a pariton luku, ts. $a = 2n + 1$ (1 p.)

Väite: $a^2 + 5$ on parillinen.

Todistus:

$$\begin{aligned} a^2 + 5 &= (2n + 1)^2 + 5 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 + 5 \\ &= 4n^2 + 4n + 6 \\ &= 2(2n^2 + 2n + 3) \end{aligned} \quad (1 \text{ p.})$$

Koska $2n^2 + 2n + 3$ on kokonaisluku, $2(2n^2 + 2n + 3)$ on parillinen luku. \square (1 p.)

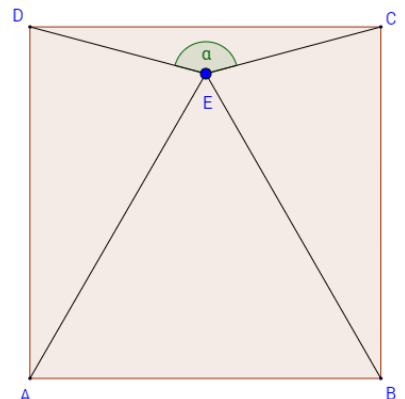
3. Nelikulmio $ABCD$ on neliö, ja kolmio ABE on tasasivuinen. Kuinka suuri kulma α on? (6 p.)

Koska kolmio ABE on tasasivuinen, $AB = AE = BE$.

Lisäksi koska nelikulmio $ABCD$ on neliö, niin $AB = AD$. Eli $AE = AD$, joten kolmio AED on tasakylkinen. (1 p.)

Kaikki kulmat tasasivuisessa kolmiossa ABE ovat 60° , joten tasakylkisen kolmion AED huippukulma A on $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (1 p.)

ja kantakulma D on $\frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$. (1 p.)



Kolmiossa DEC kulma D on $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. **(1 p.)**

Koska kolmio ABE on tasasivuinen (piste E on yhtä kaukana sivuista AD ja BC), kolmio DEC on tasakylkinen.

Eli kolmion DEC kulma C on 15° . (tai muu perustelu tämän kulman suuruuden selvittämiseksi)
(1 p.)

Kulma $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 150^\circ$. **(1 p.)**