Matemaattinen todistus

- Todistuksia varten tarvitaan parillisuuden ja parittomuuden määritelmää
  - Parillinen kokonaisluku p voidaan esittää muodossa $p = 2q$ ($q =$kokonaisluku)
  - Pariton kokonaisluku p voidaan esittää muodossa $p = 2q + 1$ ($q =$kokonaisluku)
- Lisäksi tarvitaan rationaalilukujen ja irrationaalilukujen määritelmät
  - Reaaliluku x on rationaaliluku, jos ja vain jos se voidaan ilmaista murtolukumuodossa $x = \frac{m}{n}$, missä m ja n $(\neq 0)$ ovat kokonaislukuja.
  - Reaaliluku x on irrationaaliluku, jos se ei ole rationaaliluku

Matemaattinen todistus

- Matemaattinen todistustehtävä voidaan ajatella implikaationa $A \rightarrow B$
- Lause voidaan ilmaista esim.
  - Oletetaan, että A. Tällöin B.
  - Jos A, niin B.
- Todistamiseen voidaan käyttää jotain seuraavista:
  - Suora todistus
  - Käänteinen todistus
  - Yleinen ristiriitatodistus

Matemaattinen todistus

Suoran todistuksen rakenne:

Oletus. A

Väitös. B

Todistus. Päätellään oletuksesta A väitös B.

Esimerkki 1

- Todista lause: Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.

Oletus. Kokonaisluvut m ja n ovat parittomia.

Väitös. $m + n$ on parillinen

Todistus. Oletuksen perusteella on olemassa sellaiset kokonaisluvut k ja l, että $m = 2k + 1$ ja $n = 2l + 1$.

Lasketaan lukujen m ja n summa.

$$\begin{aligned} m+n &= (2k+1)+(2l+1) \\ &= 2k+2l+2 \\ &= 2(k+l+1) \end{aligned}$$

Koska $(k+l+1)$ on kokonaisluku

ja $m+n=2(k+l+1)$, niin luku $m+n$ on parillinen. $\square$

Matemaattinen todistus

Käänteinen todistus käyttää hyväksi sitä, että lauseet $A \to B$ ja $\neg A \to \neg B$ ovat loogisesti ekvivalentit

Käänteisen todistuksen rakenne:

Oletus. A

Väitös. B

Todistus. Tehdään vastaoletus $\neg B$ ja päätellään $\neg A$.

(Pyritään pääsemään vastaoletuksesta ristiriitaan oletuksen kanssa.)

Esimerkki 2

- Todista lause: Jos kahden kokonaisluvun tulo on parillinen, niin ainakin toinen luvuista on parillinen.

Oletus. Kokonaislukujen m ja n tulo mn on parillinen.

Väitös. Ainakin toinen luvuista m tai n on parillinen.

Todistus. Tehdään vastaoletus: m ja n eivät kumpikaan ole parillisia.

Vastaoletuksen nojalla luvut m ja n ovat parittomia eli on olemassa sellaiset kokonaisluvut k ja l, että $m = 2k + 1$ ja $n = 2l + 1$.

Lasketaan tulo mn.

$$\begin{aligned} mn &= (2k + 1)(2l + 1) \\ &= 4kl + 2k + 2l + 1 \\ &= 2(2kl + k + l) + 1 \end{aligned}$$

Koska $2kl + k + l$ on kokonaisluku, niin luku $mn = 2(2kl + k + l) + 1$ on pariton. Tämä on ristiriita oletuksen kanssa.

Siis ainakin toinen luvuista m ja n on parillinen. Lause on todistettu.□

Matemaattinen todistus

- Yleisen ristiriitatodistuksen rakenne:

Oletus. A

Väitös. B

Todistus. Tehdään vastaoletus $\neg B$ ja päätellään oletusta A ja vastaoletusta $\neg B$ käyttäen jokin ristiriita.

Esimerkki 3

- Todista lause: Jos luvun x neliö on 2, niin luku x on irrationaaliluku. (Tai: todista, että luku $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku)

Oletus. $x^2 = 2$

Väitös. Luku x on irrationaaliluku.

Todistus. Tehdään vastaoletus: luku x on rationaaliluku

Vastaoletuksen nojalla on olemassa sellaiset kokonaisluvut m ja n, että $x = \frac{m}{n}$. Saatetaan murtoluku $\frac{m}{n}$ supistettuun muotoon tekemällä kaikki mahdolliset supistukset, jolloin saadaan $x = \frac{p}{q}$.

Koska murtoluku $\frac{p}{q}$ ei enää supistu, enintään toinen kokonaisluvuista p ja q on parillinen.

Koska $x^2 = 2$, niin

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

Siis luku p^2 on parillinen. Koska parittoman kokonaisluvun neliö on pariton, luku p on parillinen. On siis olemassa sellainen kokonaisluku k, että

$$p = 2k$$

Koska $p^2 = 2q^2$, niin

$(2k)^2 = 2q^2$

$4k^2 = 2q^2 \quad |:2$

$2k^2 = q^2$.

Siis luku q^2 on parillinen, joten q on parillinen.

Siis luvut p ja q ovat molemmat parillisia. On päädytty ristiriitaan, sillä todettiin, että enintään toinen luvuista p ja q on parillinen.

Luku x on irrationaaliluku. □